Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης

Γιάννης Αλεξίου -Μαθηματικός, Φεβρουάριος 2012

Περίληψη

« ***Οι κρίσιμες τιμές της f, καθώς και λίγοι ακόμα αριθμοί, είναι τελικά αυτοί που πρέπει να μελετήσουμε για να βρούμε τα μέγιστα και ελάχιστα δοσμένης συνάρτησης f***. » Για τους αμύητους, η εύρεση της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης είναι ένα από τα πιο παράξενα θέματα στον Απειροστικό Λογισμό και δεν υπάρχει καμιά αντίρρηση ότι τα προβλήματα αυτού του είδους έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Με το παρόν άρθρο γίνεται μια προσπάθεια να δοθεί απάντηση στο ερώτημα πολλών μαθητών μας : « ***Γίνεται μια συνάρτηση f συνεχής σ 'ένα διάστημα Δ=[α, β] ή Δ=[α,+∞) να μην παρουσιάζει στο άκρο του διαστήματος τοπικό ακρότατο; »***

***** Ορισμοί *****

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.

Έστω μια συνάρτηση f, και A ένα σύνολο αριθμών που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f. Ένα σημείο y στο A είναι **σημείο μεγίστου** για την f στο A, αν f(x)≤f(y) για κάθε x $\in$ A. Ο αριθμός f(y) λέγεται η **μέγιστη τιμή** της f στο A (*λέμε ακόμα ότι η f «έχει τη μέγιστή της τιμή στο A, στο σημείο y»*)

- *Είναι προφανές ότι η f έχει ελάχιστο στο A στο x, αν η -f έχει μέγιστο στο A στο x.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.

Έστω μια συνάρτηση f, και A ένα σύνολο αριθμών που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f. Ένα σημείο y στο A είναι **σημείο τοπικού μεγίστου** για την f στο A, αν υπάρχει κάποιο δ>0 τέτοιο ώστε f(x)≤f(y) για κάθε x $\in A\cap(y-\delta, y+\delta)$. **(δηλαδή, το y να είναι σημείο μεγίστου για την f στο $A\cap(y-\delta, y+\delta)$)**

Ερώτημα

Υπάρχει συνάρτηση f :[α, +∞), συνεχής όπου στο x=α να μην έχει τοπικό ακρότατο;

Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & , x>0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$.

Η συνάρτηση για κάθε x>0 είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και σύνθεση συνεχών. Επίσης στο x=0 είναι συνεχής αφού:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$ (1) εφόσον $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le x^2 \Leftrightarrow -x^2\le x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\le x^2$.

Όμως, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2)=0$ και από το κριτήριο παρεμβολής έχω την (1).

Τελικά η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

A. <u>Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο x=0 τοπικό ακρότατο και συγκεκριμένα τοπικό μέγιστο.</u>

Σύμφωνα με τον **<u>ορισμό 2</u>** θα υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε f (x) ≤ f (0)=0 για κάθε x $\in[0,+\infty)\cap(0-\delta,0+\delta)$ ή αλλιώς x $\in[0,\delta)$. Θεωρώντας ένα $x_\kappa=\dfrac{1}{2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ με $\kappa\in Z$

μπορώ να βρω κατάλληλο $\kappa\in Z$ ώστε $0<x_\kappa<\delta$.(*λύνοντας την ανίσωση* $x_\kappa<\delta$ $\Leftrightarrow \kappa>\dfrac{2-\pi\delta}{4\pi\delta}$ *όπου ο αριθμητής είναι θετικός αφού το δ πολύ μικρό*). Έτσι αν υπολογίσουμε το $f(x_\kappa)$ βλέπουμε ότι : $f(x_\kappa)=x_\kappa{}^2\eta\mu\dfrac{1}{x_\kappa}=x_\kappa{}^2\eta\mu(2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2})=x_\kappa{}^2>0$.

Επομένως, για οποιοδήποτε δ>0 μπορώ να βρω κ>0 άρα και $x_\kappa>0$ (μιας και $\lim\limits_{\kappa\to\infty}x_\kappa=0$) ώστε να ισχύει $f(x_\kappa)$>0. Άρα το x=0 **ΔΕΝ είναι τοπικό μέγιστο.**

B. <u>Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο x=0 τοπικό ελάχιστο.</u>

Όπως και πριν, θα υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε f (x) ≥ f (0)=0 για κάθε

x $\in [0,+\infty) \cap (0-\delta, 0+\delta)$ ή αλλιώς x $\in [0,\delta)$. Θεωρώντας τώρα ένα $x_\kappa = \dfrac{1}{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}}$ με

$\kappa \in Z$ μπορώ πάλι να βρω κατάλληλο $\kappa \in Z$ ώστε $0 < x_\kappa < \delta$. Έτσι αν υπολογίσουμε το

$f(x_\kappa)$ βλέπουμε ότι : $f(x_\kappa) = {x_\kappa}^2 \eta\mu \dfrac{1}{x_\kappa} = {x_\kappa}^2 \eta\mu(2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}) = -{x_\kappa}^2 < 0$. Επομένως, για

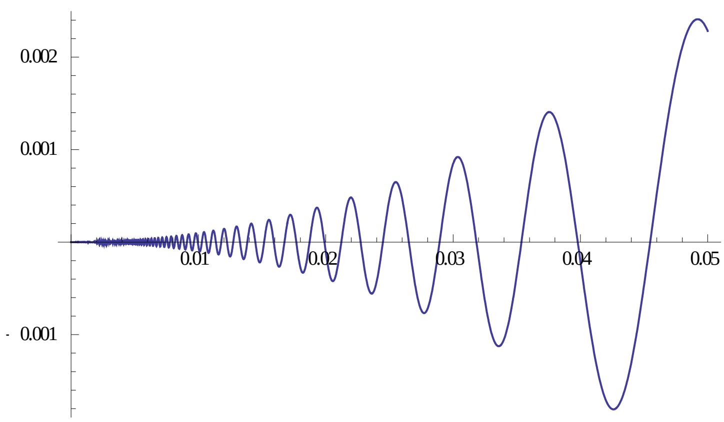
οποιοδήποτε δ>0 μπορώ να βρω κ>0 άρα και $x_\kappa > 0$ (μιας και $\lim\limits_{\kappa\to\infty} x_\kappa = 0$) ώστε να ισχύει

$f(x_\kappa)$<0. Άρα το x=0 **ΔΕΝ είναι τοπικό ελάχιστο.**

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Οσοδήποτε κοντά στο 0, έχω και θετικές τιμές και αρνητικές τιμές, άρα το 0 δεν μπορεί να είναι ακρότατο.

- *Δίνεται το γράφημα της συνάρτησης* f



Βιβλιογραφία

a) R.L. FINNEY , M.D. Weir , F.R. Giordano - THOMAS Απειροστικός Λογισμός τ.I