Β'Λυκείου

1. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^2-(2006\kappa+1)x+2007=0$ όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$, έχει δύο ακέραιες ρίζες.

2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4, ΒΓ = 2 και σημείο Μ στο εσωτερικό του με ΜΓ = 1 και ΜΒ = $\sqrt{3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

3. Έστω $\kappa=2+2^2+2^3+\ldots+2^{2008}$. Να αποδείξετε ότι ο 30 διαιρεί τον κ.

4. α) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}>\sqrt[3]{19}$
β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^{-1}x+x^{-1}=\frac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}.$$

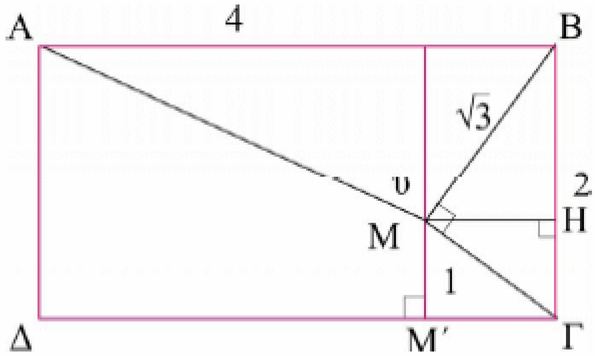
Υπόδειξη

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες , τότε

$$x_1 + x_2 = 2006\kappa + 1 \quad (1) \text{ και } x_1 \cdot x_2 = 2007 \quad (2).$$

Από την (2) προκύπτει ότι οι x_1, x_2 θα είναι περιττοί. Αλλά τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2$ θα είναι άρτιος, οπότε δεν θα ισχύει η (1).

2.



Παρατηρούμε ότι $\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 = 2^2$ οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο στο Μ. Επειδή

$$\mathrm{M\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \; \acute{\varepsilon}\chi o \upsilon \mu \varepsilon \; \mathrm{M}\overset{\Lambda}{\mathrm{B}}\Gamma = 30^0,$$

οπότε $\mathrm{M}\overset{\Lambda}{\Gamma}\mathrm{B} = 60^0 \; \kappa\alpha\iota \; \mathrm{M}\overset{\Lambda}{\Gamma}\Delta = 30^0.$ Έστω $\mathrm{MM}' \perp \Delta\Gamma$, τότε $\mathrm{MM}' = \frac{1}{2}$ άρα $\upsilon = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Το εμβαδόν του $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ είναι $\mathrm{E} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3.$

β΄ τρόπος

$$\mathrm{MB}^2 = \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{BH} \text{ οπότε } 3 = 2 \cdot \upsilon \quad \text{άρα} \quad \upsilon = \frac{3}{2}$$

3. Είναι

$$\kappa = (2+2^2+2^3+2^4) + 2^4(2+2^2+2^3+2^4) + \ldots + 2^{2004}(2+2^2+2^3+2^4) =$$

$$= 30(1+2^4+2^8+\ldots+2^{2004}) = \pi o\lambda.\, 30$$

4. **α)** Από τη γνωστή ανισότητα: $\dfrac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$ όπου α, β θετικοί

με $\alpha \neq \beta$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{2} > \sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{6}$$

Οπότε $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} > 2\sqrt[6]{6}$.

Αρκεί λοιπόν

$$2\sqrt[6]{6} \geq \sqrt[3]{19}, \quad ή \quad 2^6 \cdot 6 \geq 19^2, \quad ή \quad 384 \geq 361$$

που ισχύει.

β) Αν $\lambda = \dfrac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ τότε

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{19}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \text{ οπότε } \lambda^2 < 2.$$

Η εξίσωση για $x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την $x^2 - 2\lambda x + 2 = 0$ με $\Delta = 4(\lambda^2 - 2) < 0$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

β΄ τρόπος

$$x^2 - 2\lambda x + 2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + 2 =$$

$$= (x-\lambda)^2 + (2-\lambda^2) \geq 2 - \lambda^2 > 0$$