Β'Λυκείου

1. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλευρές ΑΒ=α και ΒΓ=β. Θεωρούμε σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ, αντιστοίχως, έτσι ώστε η περίμετρος του τριγώνου ΕΓΖ να είναι ίση προς α+β και η ΑΖ να είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{Z}E$.

   (Ι) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους α, β.

   (ΙΙ) Να βρείτε τη γωνία $E\hat{A}Z$.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 45°$ και $\hat{B} > 45°$. Στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τρίγωνο ΑΒΔ ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{\Delta} = 90°$. Στη συνέχεια, εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΑΓΖ με $\hat{E} = 90°$, $\hat{Z} = 90°$.
Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο ν που είναι τέτοιος ώστε ο αριθμός $\nu^2 + 2004\nu$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

4. Οι μαθητές Χ και Υ παίζουν ένα παιγνίδι ως εξής:
Επιλέγουν εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλον έναν από τους αριθμούς 1 και 2.
Αρχίζει ο X επιλέγοντας τον αριθμό $x_1 \in \{1,2\}$ και συνεχίζει ο Υ επιλέγοντας τον αριθμό $y_1 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_1 = x_1 + y_1$. Στη συνέχεια, ο Χ επιλέγει τον αριθμό $x_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_2 = \Sigma_1 + x_2$, ενώ ο Υ συνεχίζοντας επιλέγει τον αριθμό $y_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_3 = \Sigma_2 + y_2$ κ. ο.κ. Νικητής αναδεικνύεται ο μαθητής που θα καταγράψει σε μία επιλογή του ως άθροισμα τον αριθμό 200.
Να εξηγήσετε γιατί ο μαθητής Χ έχει στρατηγική νίκης.
Ισχύει το ίδιο, αν ο νικητής αναδεικνύεται όταν το άθροισμα γίνει 300;

Υπόδειξη

1.

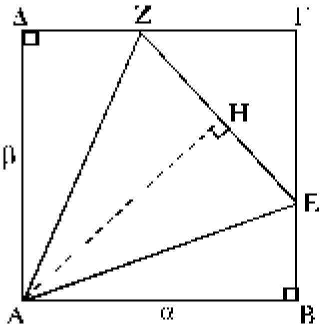
i) Από την υπόθεση έχουμε

ΓΕ+ΓΖ+ΖΕ=α+β

ΓΕ+ΓΖ+ΖΕ=ΔΖ+ΖΓ+ΓΕ+ΕΒ

ΖΕ=ΔΖ+ΕΒ (1)

Φέρουμε $AH \perp ZE$ και παρατηρούμε ότι τρ. ΑΔΖ = τρ. ΑΗΖ



$$\left[\hat{\Delta} = \hat{H} = 90^o, \quad \text{ΑΖ κοινή και } \Delta\hat{Z}A = A\hat{Z}H, \text{ αφού ΑΖ διχοτόμος } \Delta\hat{Z}E\right].$$

Άρα θα είναι ΖΗ=ΔΖ (2) και ΑΗ=ΑΔ=β (3)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΗΕ=ΕΒ, οπότε και τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΒΕ είναι ίσα.

Άρα είναι και ΑΗ=ΑΒ=α (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει η σχέση α=β.

ii) Έχουμε

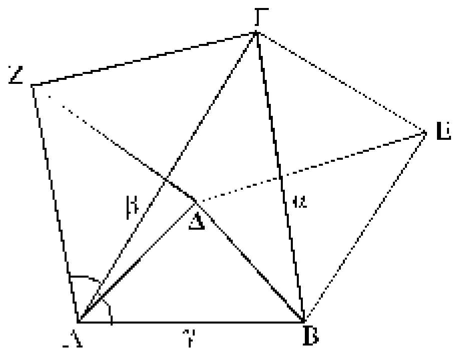
$$E\hat{A}Z = E\hat{A}H + H\hat{A}Z = \frac{B\hat{A}H}{2} + \frac{H\hat{A}\Delta}{2} = \frac{B\hat{A}H + H\hat{A}\Delta}{2} = \frac{B\hat{A}\Delta}{2} = 45^o.$$

2. Από τα ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΕ και ΑΓΖ λαμβάνουμε

$$A\Delta = \Delta B = \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} \qquad AZ = \frac{\beta\sqrt{2}}{2} = \Gamma Z$$

και $BE = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \Gamma E$.

Έχουμε ότι $B\hat{A}\Gamma = 45^o + \Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}Z$



και $\dfrac{A\Delta}{AZ} = \dfrac{\frac{\gamma\sqrt{2}}{2}}{\frac{\beta\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{AZ}{A\Gamma}$ οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΖ είναι όμοια.

Άρα έχουμε την ισότητα

$$\frac{\Delta Z}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{\Delta Z}{\alpha} = \frac{\frac{\gamma\sqrt{2}}{2}}{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Delta Z = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \Gamma E \quad (1)$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$A\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx \Delta\overset{\Delta}{B}E \text{ και } \Delta E = \Gamma Z = \frac{\beta\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Έστω ότι ισχύει $\nu^2 + 2004\nu = (\nu + \kappa)^2$ για κάποιο κ θετικό ακέραιο.

Τότε $\nu = \dfrac{\kappa^2}{2004 - 2\kappa}$, με 0<κ<1002 (1)

Στην ισότητα (1) παρατηρούμε ότι αυξανομένου του κ, αυξάνεται και το ν, οπότε πρέπει να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό κ με 0<κ<1002 που είναι τέτοιο ώστε $(2004 - 2\kappa) \mid \kappa^2$.

Για κ=1001 είναι $2004 - 2\kappa = 2 \nmid \kappa^2 = 1001^2$.

Για κ=1000 είναι $2004 - 2\kappa = 4 \mid \kappa^2 = 1000^2$.

Άρα ο μεγαλύτερος αριθμός ν προκύπτει από την (1) για κ=1000 και είναι ο

$$\nu = \frac{1000^2}{4} = 250000.$$

2ος τρόπος

Θα πρέπει $\nu^2 + 2004 \cdot \nu = \kappa^2 \Leftrightarrow \nu^2 + 2004 \cdot \nu - \kappa^2 = 0$.

$\Delta = 2004^2 + 4\kappa^2 = \lambda^2 \quad \Rightarrow |\lambda| = 2\mu > 0$ άρα $2004^2 + 4\kappa^2 = 4\mu^2 \Rightarrow$

$501 \cdot 2004 + \kappa^2 = \mu^2 \Rightarrow 501 \cdot 2004 = (\mu - \kappa)(\mu + \kappa) \quad (1)$

Για $\Delta = \lambda^2 \Rightarrow \nu_{1,2} = \dfrac{-2004 \pm \sqrt{\lambda^2}}{2} \Rightarrow \nu_{1,2} = -1002 \pm |\mu|$

$\Rightarrow \nu_{1,2} = 1002 \pm \mu$. Άρα αρκεί σαν ν να πάρουμε την $\nu_1 = -1002 + \mu$ με κ μέγιστο δυνατό. Από την(1) για να είναι ο κ μέγιστος, θα πρέπει το (μ+κ) να είναι μέγιστο και το μ-κ ελάχιστο, για

$\mu - \kappa = 1 \Rightarrow \mu + \kappa = 501^2 \cdot 2004 \Rightarrow 2\mu = 501 \cdot 2004 + 1$ αδύνατον άρα

$\mu - \kappa = 2$ και $\mu + \kappa = 501^2 \cdot 2(2004 : 4 = 501) \Rightarrow 2\mu = 501^2 \cdot 2 + 2$

$\Rightarrow \mu = 501^2 + 1 = 251002$.

Άρα $\nu_{max} = -1002 + 251002 \Rightarrow \nu_{max} = 250000$.

4. Η βασική μας παρατήρηση είναι ότι είναι δυνατόν μετά από κάθε επιλογή των δύο μαθητών, έστω x_i και y_i, να ισχύει ότι $x_i + y_i = 3$. Πράγματι, αν ο μαθητής Χ επιλέξει $x_i = 1$, τότε ο μαθητής Υ επιλέγει $y_i = 2$, ενώ αν ο μαθητής Χ επιλέξει $x_i = 2$, τότε ο μαθητής Υ επιλέγει $y_i = 1$.

Έτσι είναι δυνατόν το συνολικό άθροισμα μετά από δυο διαδοχικές επιλογές των μαθητών να αυξάνει κάθε φορά κατά 3.

Ο μαθητής Χ που αρχίζει πρώτος πρέπει να παρατηρήσει ότι $200 = 66 \cdot 3 + 2$, οπότε θα κάνει την πρώτη επιλογή του $x_i = 2$, οπότε στη συνέχεια μπορεί ανεξάρτητα από τις επιλογές του μαθητή Υ να μεγαλώνει κάθε φορά το προηγούμενο συνολικό άθροισμα κατά 3 και έτσι να φθάσει πρώτος το 200.

Δεν ισχύει το ίδιο, αν το ζητούμενο τελικό άθροισμα είναι το 300, γιατί $300 = 100 \cdot 3$. Έτσι στη περίπτωση αυτή ο μαθητής Υ που επιλέγει δεύτερος μπορεί πρώτος να καταγράψει αυτό το άθροισμα.