

1. Ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρές $AB=\alpha$ και $B\Gamma=\beta$. Θεωρούμε σημεία E και Z πάνω στις πλευρές $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$, αντιστοίχως, έτσι ώστε η περίμετρος του τριγώνου $E\Gamma Z$ να είναι ίση προς $\alpha+\beta$ και η AZ να είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta Z E}$.
 - (i) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους α, β .
 - (ii) Να βρείτε τη γωνία $\hat{E\hat{A}Z}$.

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} > 45^\circ$ και $\hat{B} > 45^\circ$. Στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τρίγωνο $AB\Delta$ ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{\Delta} = 90^\circ$. Στη συνέχεια, εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα $B\Gamma E$ και $A\Gamma Z$ με $\hat{E} = 90^\circ, \hat{Z} = 90^\circ$.
 Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο ν που είναι τέτοιος ώστε ο αριθμός $\nu^2 + 2004\nu$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

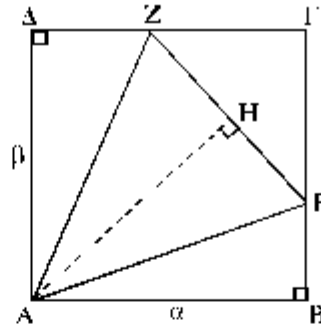
4. Οι μαθητές X και Y παίζουν ένα παιχνίδι ως εξής:
 Επιλέγουν εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλον έναν από τους αριθμούς 1 και 2.
 Αρχίζει ο X επιλέγοντας τον αριθμό $x_1 \in \{1, 2\}$ και συνεχίζει ο Y επιλέγοντας τον αριθμό $y_1 \in \{1, 2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_1 = x_1 + y_1$. Στη συνέχεια, ο X επιλέγει τον αριθμό $x_2 \in \{1, 2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_2 = \Sigma_1 + x_2$, ενώ ο Y συνεχίζοντας επιλέγει τον αριθμό $y_2 \in \{1, 2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_3 = \Sigma_2 + y_2$ κ. ο.κ. Νικητής αναδεικνύεται ο μαθητής που θα καταγράψει σε μία επιλογή του ως άθροισμα τον αριθμό 200.
 Να εξηγήσετε γιατί ο μαθητής X έχει στρατηγική νίκης.
 Ισχύει το ίδιο, αν ο νικητής αναδεικνύεται όταν το άθροισμα γίνει 300;

Υπόδειξη

1.

- i) Από την υπόθεση έχουμε
 $ΓΕ+ΓΖ+ΖΕ=α+β$
 $ΓΕ+ΓΖ+ΖΕ=ΔΖ+ΖΓ+ΓΕ+ΕΒ$
 $ΖΕ=ΔΖ+ΕΒ$ (1)

Φέρουμε $AH \perp ZE$ και παρατηρούμε
 ότι τρ. $AΔΖ =$ τρ. $AΗΖ$



$$\left[\hat{\Delta} = \hat{H} = 90^\circ, \quad AZ \text{ κοινή και } \hat{\Delta Z A} = \hat{A Z H}, \text{ αφού } AZ \text{ διχοτόμος } \hat{\Delta Z E} \right].$$

Άρα θα είναι $ZH=ΔΖ$ (2) και $AH=AD=β$ (3)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $HE=EB$, οπότε και τα ορθογώνια τρίγωνα AHE και ABE είναι ίσα.

Άρα είναι και $AH=AB=α$ (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει η σχέση $α=β$.

- ii) Έχουμε

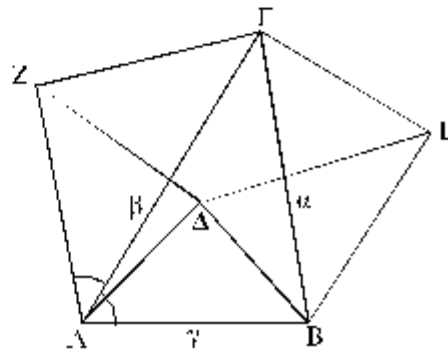
$$\hat{E A Z} = \hat{E A H} + \hat{H A Z} = \frac{\hat{B A H}}{2} + \frac{\hat{H A \Delta}}{2} = \frac{\hat{B A H} + \hat{H A \Delta}}{2} = \frac{\hat{B A \Delta}}{2} = 45^\circ.$$

2. Από τα ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma E$ και $A\Gamma Z$ λαμβάνουμε

$$A\Delta = \Delta B = \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} \quad A Z = \frac{\beta\sqrt{2}}{2} = \Gamma Z$$

$$\text{και } B E = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \Gamma E.$$

Έχουμε ότι $\hat{B A \Gamma} = 45^\circ + \hat{\Delta A \Gamma} = \hat{\Delta A Z}$



και $\frac{A\Delta}{AZ} = \frac{\frac{\gamma\sqrt{2}}{2}}{\frac{\beta\sqrt{2}}{2}} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AZ}{A\Gamma}$ οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔAZ

είναι όμοια.

Άρα έχουμε την ισότητα

$$\frac{\Delta Z}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{\Delta Z}{\alpha} = \frac{\frac{\gamma\sqrt{2}}{2}}{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Delta Z = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \Gamma E \quad (1)$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\hat{A B \Gamma} \approx \hat{\Delta B E} \text{ και } \Delta E = \Gamma Z = \frac{\beta\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Έστω ότι ισχύει $v^2 + 2004v = (v + \kappa)^2$ για κάποιο κ θετικό ακέραιο.

$$\text{Τότε } v = \frac{\kappa^2}{2004 - 2\kappa}, \text{ με } 0 < \kappa < 1002 \quad (1)$$

Στην ισότητα (1) παρατηρούμε ότι αυξανόμενου του κ , αυξάνεται και το v , οπότε πρέπει να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό κ με $0 < \kappa < 1002$ που είναι τέτοιο ώστε $(2004 - 2\kappa) \mid \kappa^2$.

Για $\kappa=1001$ είναι $2004 - 2\kappa = 2 \nmid \kappa^2 = 1001^2$.

Για $\kappa=1000$ είναι $2004 - 2\kappa = 4 \mid \kappa^2 = 1000^2$.

Άρα ο μεγαλύτερος αριθμός v προκύπτει από την (1) για $\kappa=1000$ και είναι ο

$$v = \frac{1000^2}{4} = 250000.$$

2ος τρόπος

Θα πρέπει $v^2 + 2004 \cdot v = \kappa^2 \Leftrightarrow v^2 + 2004 \cdot v - \kappa^2 = 0$.

$$\Delta = 2004^2 + 4\kappa^2 = \lambda^2 \Rightarrow |\lambda| = 2\mu > 0 \text{ άρα } 2004^2 + 4\kappa^2 = 4\mu^2 \Rightarrow$$

$$501 \cdot 2004 + \kappa^2 = \mu^2 \Rightarrow 501 \cdot 2004 = (\mu - \kappa)(\mu + \kappa) \quad (1)$$

$$\text{Για } \Delta = \lambda^2 \Rightarrow v_{1,2} = \frac{-2004 \pm \sqrt{\lambda^2}}{2} \Rightarrow v_{1,2} = -1002 \pm |\mu|$$

$\Rightarrow v_{1,2} = 1002 \pm \mu$. Άρα αρκεί σαν v να πάρουμε την $v_1 = -1002 + \mu$ με κ μέγιστο δυνατό. Από την(1) για να είναι ο κ μέγιστος, θα πρέπει το $(\mu+\kappa)$ να είναι μέγιστο και το $\mu-\kappa$ ελάχιστο, για

$$\mu - \kappa = 1 \Rightarrow \mu + \kappa = 501^2 \cdot 2004 \Rightarrow 2\mu = 501 \cdot 2004 + 1 \text{ αδύνατον άρα}$$

$$\mu - \kappa = 2 \text{ και } \mu + \kappa = 501^2 \cdot 2(2004 : 4 = 501) \Rightarrow 2\mu = 501^2 \cdot 2 + 2$$

$$\Rightarrow \mu = 501^2 + 1 = 251002.$$

$$\text{Άρα } v_{\max} = -1002 + 251002 \Rightarrow v_{\max} = 250000.$$

4. Η βασική μας παρατήρηση είναι ότι είναι δυνατόν μετά από κάθε επιλογή των δύο μαθητών, έστω x_i και y_i , να ισχύει ότι $x_i + y_i = 3$. Πράγματι, αν ο μαθητής X επιλέξει $x_i = 1$, τότε ο μαθητής Y επιλέγει $y_i = 2$, ενώ αν ο μαθητής X επιλέξει $x_i = 2$, τότε ο μαθητής Y επιλέγει $y_i = 1$.

Έτσι είναι δυνατόν το συνολικό άθροισμα μετά από δυο διαδοχικές επιλογές των μαθητών να αυξάνει κάθε φορά κατά 3.

Ο μαθητής X που αρχίζει πρώτος πρέπει να παρατηρήσει ότι $200 = 66 \cdot 3 + 2$, οπότε θα κάνει την πρώτη επιλογή του $x_i = 2$, οπότε στη συνέχεια μπορεί ανεξάρτητα από τις επιλογές του μαθητή Y να μεγαλώνει κάθε φορά το προηγούμενο συνολικό άθροισμα κατά 3 και έτσι να φθάσει πρώτος το 200.

Δεν ισχύει το ίδιο, αν το ζητούμενο τελικό άθροισμα είναι το 300, γιατί $300 = 100 \cdot 3$. Έτσι στη περίπτωση αυτή ο μαθητής Y που επιλέγει δεύτερος μπορεί πρώτος να καταγράψει αυτό το άθροισμα.