

1. Το τετράγωνο ενός αριθμού ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 72.
Επιπλέον, αν από το 60 αφαιρέσουμε το διπλάσιο του αριθμού λαμβάνουμε αριθμό μικρότερο του 52. Να βρεθεί ο αριθμός.
2. Αν x, y, a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x \neq y, x \neq 2y, y \neq 2x, a \neq \pm 3b$ και $\frac{2x-y}{a+3b} = \frac{2y-x}{a-3b} = \lambda$,
να αποδείξετε ότι :
 - (i) $x + y = 2\lambda a$ και $x - y = 2\lambda b$
 - (ii) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \geq 1$.
3. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι διαγώνιες τέμνονται στο E . Αν είναι $(ABE) = 72 \text{ m}^2$ και $(\Gamma\Delta E) = 50 \text{ m}^2$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.
4. Να βρεθούν οι ακέραιοι α, β για τους οποίους ισχύει η ισότητα
$$\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha = 2\beta^2 + 4\beta + 3$$

Υπόδειξη

Θέμα 1.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, αν x είναι ο ζητούμενος ο αριθμός, θα έχουμε:

$$x^2 = x + 72 \quad (1)$$

$$60 - 2x < 52 \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε: $x^2 - x - 72 = 0$ με διακρίνουσα

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) = 1 + 288 = 289 = 17^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x = \frac{1 \pm 17}{2} = \begin{cases} 9 \\ -8 \end{cases}$$

Όμως από την (2) έχουμε ότι:

$$60 - 2x < 52 \Leftrightarrow -2x < 52 - 60$$

$$\Leftrightarrow -2x < -8$$

$$\Leftrightarrow 2x > 8$$

$$\Leftrightarrow x > 4$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9.

Θέμα 2.

i) Έχουμε $\frac{2x - y}{a + 3b} = \frac{2y - x}{a - 3b} = \lambda$,

Τότε

$$2x - y = \lambda a + 3\lambda b \quad (1)$$

$$-x + 2y = \lambda a - 3\lambda b \quad (2)$$

από τις οποίες με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2\lambda a \\ 3x - 3y = 6\lambda b \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x + y = 2\lambda a \\ x - y = 2\lambda b \end{array} \quad (3)$$

$$(4)$$

ii) Από τις (3) και (4) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 2\lambda a + 2\lambda b \\ 2y = 2\lambda a - 2\lambda b \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = \lambda a + \lambda b \\ y = \lambda a - \lambda b \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = \lambda(a + b) \\ y = \lambda(a - b) \end{array} \right\},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{\lambda^2(a+b)^2 + \lambda^2(a-b)^2}{\lambda^2(a+b)^2 - \lambda^2(a-b)^2} \geq \frac{\lambda^2 \cdot 2(a^2 + b^2)}{\lambda^2 \cdot 4ab} = \frac{a^2 + b^2}{2ab},$$

οπότε αρκεί να είναι

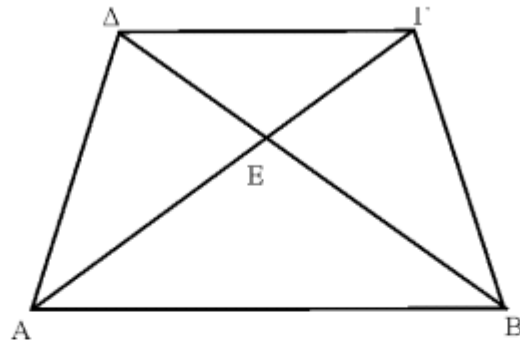
$$\frac{a^2 + b^2}{2ab} \geq 1 \Leftrightarrow \overset{a, b > 0}{a^2 + b^2 - 2ab} \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Θέμα 3.

Τα τρίγωνα $\triangle AEB$ και $\triangle E\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{AE}{E\Gamma}$,

οπότε θα είναι:

$$\frac{(AEB)}{(\Delta E\Gamma)} = \left(\frac{AE}{E\Gamma}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{AE}{E\Gamma}\right)^2 = \frac{72}{50} \Leftrightarrow \frac{AE}{E\Gamma} = \sqrt{\frac{72}{50}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$$



Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Δ , οπότε

$$\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{6}{5} \Rightarrow (A\Delta E) = \frac{6}{5}(\Delta E\Gamma) = \frac{6}{5} \cdot 50\text{m}^2 = 60\text{m}^2.$$

Ομοίως λαμβάνουμε $\frac{BE}{E\Delta} = \frac{6}{5}$ και $(BE\Gamma) = 60\text{m}^2$, οπότε

$$(AB\Gamma\Delta) = (AEB) + (BE\Gamma) + (\Gamma E\Delta) + (\Delta E A) = 72 + 60 + 50 + 60 = 242\text{m}^2.$$

Θέμα 4.

Έχουμε

$$\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha = 2\beta^2 + 4\beta + 3 \Leftrightarrow \alpha(\beta^2 + 2\beta + 1) = 2(\beta^2 + 2\beta) + 3$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\beta^2 + 2\beta + 1) = 2(\beta^2 + 2\beta + 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2)(\beta + 1)^2 = 1$$

^{αφ'εξ}

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 1 \quad \text{και} \quad (\beta + 1)^2 = 1 \quad (\text{αφού } (\beta + 1)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2 = 1 \quad \text{και} \quad \beta + 1 = 1) \quad \text{ή} \quad (\alpha - 2 = 1 \quad \text{και} \quad \beta + 1 = -1)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = 3 \quad \text{και} \quad \beta = 0) \quad \text{ή} \quad (\alpha = 3 \quad \text{και} \quad \beta = -2)$$