

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι $xyz = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{1}{y+1 - \frac{y}{x+1}} + \frac{1}{z+1 - \frac{z}{y+1}} + \frac{1}{x+1 - \frac{x}{z+1}} .$$

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$3(1 + a^2 + a^4)x = (1 + a + a^2)^2 x + a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1$$

ως προς x , θεωρώντας το a ως παράμετρο.

3. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ$ και σημείο B στο εσωτερικό του. Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΕ$ προς το ίδιο μέρος του ευθυγράμμου τμήματος $ΑΓ$.

Αν οι $ΑΕ$ και $ΓΔ$ τέμνονται στο Z , να βρείτε τη γωνία $\hat{A}Z\hat{D}$.

4. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό M , ο οποίος έχει την ιδιότητα: για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha + \beta = 1$

ισχύει ότι: $(1 + \frac{1}{\alpha})(1 + \frac{1}{\beta}) \geq M$

Υπόδειξη

1. Από την συνθήκη $xyz=1$ προκύπτει ότι $z = \frac{1}{xy}$, οπότε με πράξεις και αντικατάσταση λαμβάνουμε:

$$K = \frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{\frac{1}{x}+y+1} + \frac{\frac{1}{xy}+1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}+1}$$

$$K = \frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{xy+x}{xy+x+1} + \frac{1+xy}{xy+x+1}$$

$$K = \frac{2xy+2x+2}{xy+x+1} = \frac{2(xy+x+1)}{xy+x+1} = 2.$$

2. Η εξίσωση γίνεται:

$$[3(1+\alpha^2+\alpha^4) - (1+\alpha+\alpha^2)^2]x = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow (3+3\alpha^2+3\alpha^4-1-\alpha^2-\alpha^4-2\alpha-2\alpha^2-2\alpha^3)x = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha^4 - 2\alpha^3 - 2\alpha + 2)x = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow [2\alpha^3(\alpha-1) - 2(\alpha-1)]x = \alpha^3(\alpha^2 + \alpha + 1) - (\alpha^2 + \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-1)(\alpha^3-1)x = (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^3-1)$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-1)^2(\alpha^2 + \alpha + 1)x = (\alpha^2 + \alpha + 1)^2(\alpha-1) \quad (1)$$

Έχουμε όμως ότι

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- (i) Αν $\alpha-1 \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq 1$, τότε οι εξίσωση έχει τη λύση

$$x = \frac{(\alpha^2 + \alpha + 1)^2(\alpha-1)}{2(\alpha-1)^2(\alpha^2 + \alpha + 1)} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{2(\alpha-1)}$$

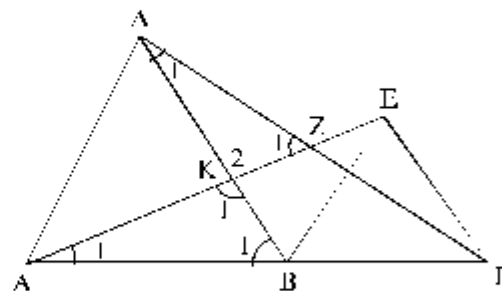
- (ii) Αν $\alpha-1=0$, δηλαδή $\alpha=1$, τότε (1) $\Leftrightarrow 0x = 0$ και αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3. Τα τρίγωνα ABE και BΓΔ έχουν

- $AB=B\Delta$
- $BE=B\Gamma$
- $\hat{A}\hat{B}E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \hat{\Gamma}\hat{B}\Delta$.

Άρα τα τρίγωνα ABE και BΓΔ είναι ίσα, οπότε

θα έχουν και $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$.



Τα τρίγωνα AKB και ΔΚΖ έχουν δύο γωνίες τους ίσες, μια προς μία, $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$

και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ (ως κατά κορυφήν). Άρα θα έχουν και $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1 = 60^\circ$, δηλαδή

$\hat{A}\hat{Z}\Delta = 60^\circ$.

4. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) > 1$, οπότε θα θεωρήσουμε ότι είναι $M > 1$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq M &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} \geq M \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} \geq M \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} \geq M \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{\alpha\beta} \geq M \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha\beta} \geq M - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{2} \leq \frac{1}{M - 1}, \end{aligned}$$

(αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι $M > 1$)

$$\Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{2}{M - 1} \quad (1)$$

Άρα ζητάμε το μεγαλύτερο M που ικανοποιεί την (1).

Έχουμε $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, που ισχύει, οπότε για $\alpha + \beta = 1$

λαμβάνουμε $1 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{1}{4}$ και η ισότητα ισχύει για $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Άρα ο μικρότερος αριθμός $\frac{2}{M - 1}$ για τον οποίο αληθεύει η (1) είναι $\frac{1}{4}$, οπότε ο μεγαλύτερος αριθμός M για τον οποίο ικανοποιείται η (1) προκύπτει από την εξίσωση

$$\frac{2}{M - 1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow M = 9.$$

2ος τρόπος

Α' Λυκείου 4ο Θέμα

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) &= \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{\beta}\right) \\ &= \left(1 + 1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \left(1 + 1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(2 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \left(2 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \end{aligned}$$

$$= 4 + 2\frac{\alpha}{\beta} + 2\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 4 + 1 + 2\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 5 + 2 \cdot 2 = 9$$

και επειδή για $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 9$ το M είναι το 9.