ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

ΘΕΜΑ 1ο :

Α.1 Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελίδα 235

Α.2 Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελίδα 191

Β. α) Σ , β) Σ , γ) Λ , δ) Λ , ε) Σ

ΘΕΜΑ 2ο :

α. Είναι

$$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{2}+i\right|\left|z\right|=6 \Leftrightarrow 3\left|z\right|=6 \Leftrightarrow \left|z\right|=2 \;,$$

οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος C με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ=2 .

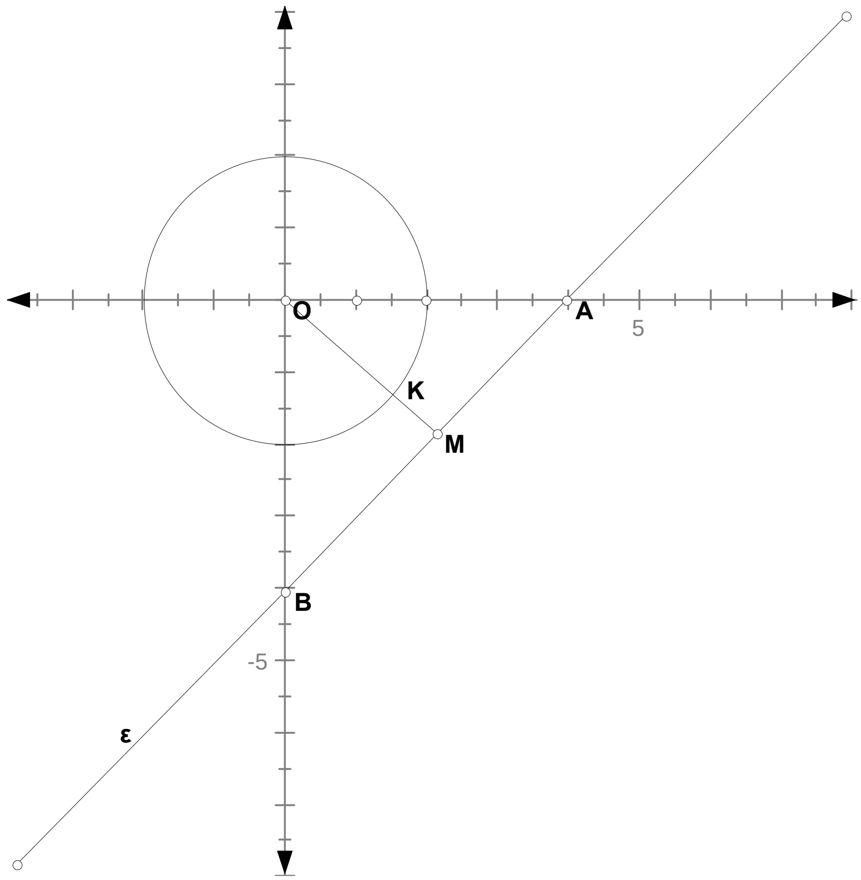
β. Από την εξίσωση $\left|w-(1-i)\right|=\left|w-(3-3i)\right|$ προκύπτει σύμφωνα με τη θεωρία ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία Α(1,-1) και Β(3,-3) . Το μέσο του ΑΒ είναι το Μ(2,-2) και επειδή η ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=-1$, η μεσοκάθετος (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon}=1$. Είναι επομένως :

$$(\varepsilon):\ y-(-2)=1(x-2) \Leftrightarrow y=x-4 \Leftrightarrow x-y-4=0 \;.$$

γ. Η ελάχιστη τιμή του |w| είναι η απόσταση του O(0,0) από την (ε) , δηλ.

$$d\left(O,\varepsilon\right)=\frac{\left|0-0-4\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=2\sqrt{2} \;.$$

δ. Αφού γίνει το σχήμα και σχεδιάσουμε τον κύκλο με την ευθεία , διαπιστώνουμε ότι η ελάχιστη τιμή του |z-w|



είναι η απόσταση

του O(0,0) από την (ε) μείον την ακτίνα του κύκλου (C) δηλ. KM=OM-OK= $2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Σχόλιο

Η εύρεση της ελάχιστης τιμής αλγεβρικά, δηλαδή με τη σχέση

$$|z+w|\geq|z-w|\geq||z|-|w||\ ,$$

χωρίς την απαραίτητη επαλήθευση ότι η ακραία τιμή μπορεί να ληφθεί , είναι ελλιπής.

ΘΕΜΑ 3ο :

α. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

Έτσι , από κανόνα του *De l΄ Hospital,* παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Επειδή λοιπόν $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

β. Για κάθε x > 0 η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων με $f'(x) = \ln x + 1$.

Επομένως :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \text{ και } f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$$

και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

χ	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		− 0 +	
$f(x)$		↘	↗

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, $\frac{1}{e}$] και γνησίως αύξουσα στο [$\frac{1}{e}$,+∞) , οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο

$x_o = \frac{1}{e}$, το $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο [0, $\frac{1}{e}$] είναι f([0, $\frac{1}{e}$])=[- $\frac{1}{e}$,0] , ενώ επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο ($\frac{1}{e}$,+∞) και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ είναι

f(($\frac{1}{e}$,+∞))=(- $\frac{1}{e}$,+∞) .

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησής μας είναι

f ([0, +∞))= [- $\frac{1}{e}$,+∞) .

γ. Η εξίσωση για x > 0 γίνεται :

$$x=e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\frac{a}{x} \Leftrightarrow x\ln x=a \Leftrightarrow f(x)=a \quad , \alpha\in\mathbb{R} .$$

Με τη βοήθεια του προηγουμένου ερωτήματος έχουμε :

- Αν $\alpha< -\frac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη
- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=\frac{1}{e}$
- Αν $-\frac{1}{e}<\alpha<0$ η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες(θετικές)
- Αν α=0 η εξίσωση έχει μοναδική θετική ρίζα την
χ = 1.
- Αν α > 0 η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα που είναι και θετική.

δ. Για χ>0 έχουμε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [x,x+1] και παραγωγίσιμη στο (x,x+1) , οπότε από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ξ∈(x,x+1) τέτοιο , ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$$

Η συνάρτηση f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με $f''(x)=\frac{1}{x}$, δηλ. $f''(x)>0$ για κάθε χ>0 .Άρα η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞) , οπότε ισχύει:

$$0<\chi<\xi<\chi+1 \Leftrightarrow f'(\chi)<f'(\xi)<f'(\chi+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$$

για κάθε χ>0 .

Μία άλλη λύση στο θέμα 3δ

Θα δείξουμε ότι $f'(x+1)-f(x+1)+f(x)>0$ για κάθε x>0 .

Έστω $g(x)=f'(x+1)-f(x+1)+f(x)$ για κάθε x>0 , δηλαδή

$g(x)=\ln(x+1)+1-(x+1)\ln(x+1)+x\ln x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow g(x)=x\ln x-x\ln(x+1)+1$, x>0

Θα δείξω ότι η g παίρνει θετικές τιμές για κάθε x>0.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με

$$g'(x)=\ln x+1-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1} \quad , x>0$$

και η g΄ είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με

$$g''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\ldots=\frac{1}{x(x+1)^2}>0$$ για κάθε x>0 , άρα η g΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞) .

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$ είναι g' [(0,+∞)]=(-∞,0) δηλαδή η g'(x)<0 για κάθε x>0 , άρα η g γνησίως φθίνουσα στο (0,+∞) .

Θα βρω το σύνολο τιμών της g . Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\left(\frac{0}{0}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$, άρα το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, δηλαδή το

g((0,+∞))=(0,1) , άρα g(x)>0 .
Άρα ισχύει η ζητούμενη.

ΘΕΜΑ 4ο :

α. Αν θέσουμε $\int_0^2 f(t)\,dt = a$ η συνάρτηση γίνεται

$$f(x)=10ax^3+3ax-45,\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα

$$\int_0^2 f(t)\,dt = a \Leftrightarrow \int_0^2 (10at^3+3at-45)\,dt = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[10a\frac{t^4}{4}+3a\frac{t^2}{2}-45t\right]_0^2 = a \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a=2$$

Επομένως είναι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45,\ x\in\mathbb{R}$

Επειδή πολλά παιδιά ξεκίνησαν μ' αυτόν τον τρόπο ,ας δούμε άλλη μια μακροσκελή μεν αλλά …λύση για το θέμα 4^{α}.
Ουσιαστικά πρόκειται για άλλον τρόπο προσέγγισης του ότι το ολοκλήρωμα αποτελεί πραγματικό αριθμό

Για $x \neq 0$ έχουμε: $f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45 \Leftrightarrow \quad (1)$

$$f(x) + 45 = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(t)dt = \frac{f(x)+45}{10x^3+3x} \quad (2)$$

Παραγωγίζω στην (1) και τα 2 μέλη και έχω: $f'(x) = \int_0^2 f(t)dt\,(30x^2+3) \Leftrightarrow$

(σύμφωνα με τη (2) γράφεται: $f'(x) = \frac{f(x)+45}{10x^3+3x}(30x^2+3) \Leftrightarrow$

$$f'(x)(10x^3+3x) = f(x)(30x^2+3) + 45(30x^2+3) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(10x^3+3x) - f(x)\,(10x^3+3x)' = 45(30x^2+3) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)(10x^3+3x)-f(x)(10x^3+3x)'}{(10x^3+3x)^2}=\frac{45(30x^2+3)}{(10x^3+3x)^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{10x^3+3x}\right)' = \frac{45(30x^2+3)}{(10x^3+3x)^2}$$ άρα

$$\frac{f(x)}{10x^3+3x}=45\int\frac{(10x^3+3x)'}{(10x^3+3x)^2}dx$$ τότε

$$\frac{f(x)}{10x^3+3x}=45\left(-\frac{1}{10x^3+3x}\right)+\text{c}\Leftrightarrow$$

f(x) = -45 + c(10x^3 + 3x) για κάθε x $\neq 0$ (3).

(3) $\Leftrightarrow$ f(x) + 45 = c(10x^3 + 3x) $\Leftrightarrow$ c = $\dfrac{f(x)+45}{10x^3+3x}$ και λόγω της (2) έχω c = $\int_0^2 f(t)dt$.

Ολοκληρώνω και τα 2 μέλη της (3) και έχω:

$$\int_0^2 f(x)dx = -45\int_0^2 dx + c\int_0^2 (10x^3+3x)dx$$

$$c = -90 + c\left[\frac{10x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$

c = -90 + c(40 + 6)

c = -90 + c$\cdot 46$

c = 2

Αντικαθιστώ στην αρχική:

f(x)=(10x^3+3x)2– 45

f(x) = 20x^3 + 6x – 45 ,οπότε αποδείχθηκε, για x $\neq$ 0.

για x=0 η δοθείσα γράφεται f(0)=-45 ,το ίδιο και η προηγούμενη , άρα η παραπάνω ισχύει για κάθε x$\in \Re$.

β. Στο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$ θέτουμε y=-h και αφού $\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0$ και παίρνουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}=\lim_{y\to 0}\frac{g'(x+y)-g'(x)}{y}=g''(x)$$ για κάθε χ$\in\mathbb{R}$.

γ. ***i)*** Το όριο L = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}$ έχει μεταβλητή το h (και όχι το χ) και έχει τη μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, οπότε με τον κανόνα του *De l΄ Hospital* βρίσκουμε :

$$\text{L} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(g(x+h)-2g(x)+g(x-h)\right)'}{\left(h^2\right)'}=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(g''(x)+g''(x)\right)=g''(x)\ ,$$

Επομένως η δοσμένη σχέση γίνεται :

$$g''(x)=f(x)+45 \Leftrightarrow g''(x)=20x^3+6x$$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

Άρα $g'(x)=5x^4+3x^2+k$, $\chi\in\mathbb{R}$. Επειδή $g'(0)=1 \Leftrightarrow k=1$, είναι

$g'(x)=5x^4+3x^2+1$, $\chi\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^5+x^3+x+c$, $\chi\in\mathbb{R}$. Επειδή $g(0)=1\Leftrightarrow c=1$,

βρίσκουμε $g(x)=x^5+x^3+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Σχόλιο(για το γ. i)

Δεν μπορούμε να πάρουμε και δεύτερη φορά τον κανόνα του de L'Hospital , διότι δεν γνωρίζουμε τη συνέχεια της g ΄΄,
κάτι που είναι απαραίτητο για να βρούμε το τελικό όριο .

ii) Αφού $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1 .

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τις λύσεις των Θεμάτων επιμελήθηκαν οι μαθηματικοί:

Μπεληγιάννης Αθανάσιος
Δερβεντζή Κατερίνα
Στεργίου Μπάμπης
Παπαλουκάς Ιωάννης