ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΝΟΜΟΥ ΕΥΒΟΙΑΣ
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Δ΄ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^0

Α. 1. Θεωρία , σχολικό βιβλίο **σελ. 91**
2. Θεωρία , σχολικό βιβλίο **σελ. 188**

Β. 1) Λ , 2) Λ , 3) Σ , 4) Σ

ΘΕΜΑ 2^0

Α. Η δεύτερη λύση της εξίσωσης είναι ο συζυγής του z_1 , δηλαδή $z_2=1-i$.

Από τους τύπους του Vieta έχουμε $z_1+z_2=\frac{-\lambda}{3} \Leftrightarrow \lambda=-6$ και

$z_1 \cdot z_2=\frac{\mu}{3} \Leftrightarrow \mu=6$.

Β. α. Με τη βοήθεια των τύπων του Vieta έχουμε :

$$z_1{}^2+z_2{}^2=\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1z_2=2^2-2\cdot 2=0$$

β. Επειδή $z_1{}^2=\left(1+i\right)^2=2i$ και $z_2{}^2=\left(1-i\right)^2=-2i$ η ζητούμενη σχέση γίνεται :

$$z_1{}^{2008}+z_2{}^{2008}=\left(z_1{}^2\right)^{1004}+\left(z_2{}^2\right)^{1004}=\left(2i\right)^{1004}+\left(-2i\right)^{1004}=2^{1004}\left(i^{1004}+i^{1004}\right)=$$
$$=2^{1004}\cdot(1+1)=2^{1004}\cdot 2=2^{1005}$$

ΘΕΜΑ 3^0

Α. α. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1-x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x-1\right)^2=0$ και $f(1)=0$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$.

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x-1}=-1$ και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(x-1\right)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(x-1\right)=1-1=0$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

Β. Για x>1 η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=2(x-1)$
Άρα είναι f(2)=1 και f'(2)=2 οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α είναι ε: y-1=2(x-2)⇔y=2x-3 .

ΘΕΜΑ 4^0

Α. Πρέπει x≠0 άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $D_f=\mathbb{R}^*$.

Β. Για κάθε x≠0 η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με
$f'(x)=\dfrac{(2x+2)x-x^2-2x-k}{x^2}=\dfrac{x^2-k}{x^2}$. Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Μ(1,f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x'x είναι $f'(1)=0 \Leftrightarrow 1-k=0 \Leftrightarrow k=1$.

Γ. α. Για k=1 έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x}$, x≠0 . Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως ρητή . Άρα θα ψάξουμε για ασύμπτωτες στο $x_o=0$
στο +∞ και στο -∞ .

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ άρα η ευθεία **x=0** είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$
Άρα η ευθεία **ε : y=x+2** είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞ . Ομοίως δείχνουμε ότι η **ε** είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο - ∞ .

β. Για κάθε x≠0 είναι $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$. Για x>1 είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1, +∞) .

Τις λύσεις των θεμάτων επιμελήθηκε
ο μαθηματικός Μπεληγιάννης Αθανάσιος .