Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
Παράρτημα Νομού Ευβοίας

Απαντήσεις - Λύσεις των Θεμάτων
Γενική Παιδεία - 2007

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Σχολικό Βιβλίο **,** σελ. 152

Β. **α**. Σχολικό βιβλίο , σελ. 22

β. Σχολικό βιβλίο , σελ. 87

Γ.1. **α.** **Σ**

β. **Σ**

γ. **Λ**

Γ.1. Πρόκειται για βασικούς τύπους παραγώγισης :

$$f_1'(x)=\left(x^{\nu}\right)'=\nu\cdot x^{\nu-1}$$

$$f_2'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$f_3'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f_4'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$$

ΘΕΜΑ 2^0

Είναι $f(x)=x\cdot e^x+3$, $x\in\mathbb{R}$

α. $f'(x)=\left(x\cdot e^x+3\right)'=x'\cdot e^x+x\cdot\left(e^x\right)'+3'=e^x+x\cdot e^x=e^x-3+(x\cdot e^x+3)=e^x-3+f(x)$**,**

διότι $f(x)=x\cdot e^x+3$

β. Για $x\neq 0$ *και* $x\neq 1$ **έχουμε:**

$$\frac{f'(x)-e^x}{x^2-x}=\frac{f(x)+e^x-3-e^x}{x\cdot(x-1)}=\frac{f(x)-3}{x\cdot(x-1)}=\frac{x\cdot e^x+3-3}{x\cdot(x-1)}=\frac{e^x}{x-1}$$

Άρα :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-e^x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^0}{0-1}=-1$$

ΘΕΜΑ 3⁰

α. Έστω: $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=2\cdot P(3)=2\cdot P(4)=2\cdot P(5)=k$

Τότε:

$$P(1)=P(0)=P(1)=P(2)=k \quad \textbf{και} \quad P(3)=P(4)=P(5)=\frac{k}{2}$$

Πρέπει :

$$P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1$$

$$\Leftrightarrow 4k+\frac{3}{2}k=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8k+3k=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{2}{11}$$

Άρα: $P(1)=P(0)=P(1)=P(2)=\frac{2}{11}$ **και** $P(3)=P(4)=P(5)=\frac{1}{11}$

β. Εφόσον $-1\in \mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ θα πρέπει $-1\in A$. Επομένως :

$$-1\in A \Leftrightarrow x^2-x-3=-1 \Leftrightarrow x=-1 \;\; ή \;\; x=2$$

- Για την τιμή x = 2 βρίσκουμε A = {- 1 , 3 , 1 } , B = { 2 , 3 , 8 , - 3 } οπότε η τιμή αυτή απορρίπτεται.
- Για την τιμή x = - 1 βρίσκουμε A = {- 1 , 3 , 1 } , B = { 2 , 0 , -1 , 3 }, οπότε η τιμή αυτή είναι δεκτή.

Άλλος τρόπος

Εφόσον $-1\in \mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ θα πρέπει $-1\in A$ και $-1\in B$.

Πρέπει επίσης $3\in A$ (το οποίο ισχύει) και $3\in B$. Έχουμε λοιπόν :

- ♦ $-1\in A \Leftrightarrow x^2-x-3=-1 \Leftrightarrow x=-1 \;\; ή \;\; x=2$
- ♦ $-1\in B \Leftrightarrow$ ($x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2$) ή

  ή ($2x^2+x-2=-1 \Leftrightarrow x=-1 \; ή \; x=\frac{1}{2}$)

  ή ($-2x+1=-1 \Leftrightarrow x=1$)

Άρα για x = -1 , έχουμε ότι $-1\in A\cap B$

♦ Επίσης $3 \in B$, όταν : $x+1=3 \Leftrightarrow x=2$

ή ($2x^2+x-2=3 \Leftrightarrow 2x^2+x-5=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$)

ή ($-2x+1=3 \Leftrightarrow x=-1$)

Άρα η μοναδική τιμή του x , ώστε $A \cap B = \{-1,3\}$ είναι χ = -1

γ. Είναι A = { 1 , 3 , - 1 } , B = { 2 , 0 , -1 , 3 }, οπότε :

- $P(A)=P(1)+P(3)+P(-1)=\dfrac{5}{11}$
- $P(B)=P(2)+P(0)+P(-1)+P(3)=\dfrac{7}{11}$
- $P(A\cap B)=P(-1)+P(3)=\dfrac{3}{11}$ **,** διότι $\mathbf{A \cap B = \{-1,3\}}$
- $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{5}{12}-\dfrac{3}{12}=\dfrac{2}{11}$ **,**
- $P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=...=\dfrac{7}{11}$

Η λύση μπορεί να γίνει και βρίσκοντας με αναγραφή τα ενδεχόμενα A – B, $\mathbf{A \cup B'}$.

<u>ΘΕΜΑ 4^0</u>

α. $\overline{x}_A=\dfrac{12+18+t_3+t_4+...,t_{25}}{25}=\dfrac{30+345}{25}=\dfrac{375}{25}=15$

$\overline{x}_B=\dfrac{16+14+t_3+t_4+...,t_{25}}{25}=\dfrac{30+345}{25}=\dfrac{375}{25}=15$

β. $s_A^2=\dfrac{\left(12-\overline{x}_A\right)^2+\left(18-\overline{x}_A\right)^2+\sum_{i=3}^{25}\left(t_i-\overline{x}_A\right)^2}{25}=\dfrac{9+9+\sum_{i=3}^{25}\left(t_i-\overline{x}_A\right)^2}{25}=\dfrac{18+\sum_{i=3}^{25}\left(t_i-\overline{x}_A\right)^2}{25}$

$s_B^2=\dfrac{\left(16-\overline{x}_B\right)^2+\left(14-\overline{x}_B\right)^2+\sum_{i=3}^{25}\left(t_i-\overline{x}_B\right)^2}{25}=\dfrac{1+1+\sum_{i=3}^{25}\left(t_i-\overline{x}_B\right)^2}{25}=\dfrac{2+\sum_{i=3}^{25}\left(t_i-\overline{x}_A\right)^2}{25}$

διότι $\overline{x}_B=\overline{x}_A=15$

Επομένως :

$$s_A^2-S_B^2=\frac{18+\sum_{i=3}^{25}\left(t_i-\overline{x}_A\right)^2}{25}-\frac{2+\sum_{i=3}^{25}\left(t_i-\overline{x}_A\right)^2}{25}=\frac{16}{25}$$

γ. Είναι**:**

$$CV_A = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{S_A}{\overline{x}_A} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{S_A}{15} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow S_A = 1$$

Όμως :

$$S_A^2 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow 1 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow S_B^2 = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow S_B = \frac{3}{5}$$

Επομένως $CV_B = \frac{S_B}{\overline{x}_B} = \frac{3}{75} = \frac{1}{25}$

Άλλη διατύπωση της λύσης στο 4^o Θέμα (β)

β. Σύμφωνα με τον ορισμό είναι :

- $$s_A^{\ 2} = \frac{(12-15)^2 + (18-15)^2 + (t_3-15)^2 + (t_4-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2}{25}$$
$$= \frac{9+9}{25} + \frac{(t_3-15)^2 + (t_4-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2}{25}$$
$$= \frac{18}{25} + \frac{(t_3-15)^2 + (t_4-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2}{25}$$

- $$s_B^{\ 2} = \frac{(16-15)^2 + (14-15)^2 + (t_3-15)^2 + (t_4-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2}{25}$$
$$= \frac{1+1}{25} + \frac{(t_3-15)^2 + (t_4-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2}{25}$$
$$= \frac{2}{25} + \frac{(t_3-15)^2 + (t_4-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2}{25}$$

Επομένως $s_A^{\ 2} - s_B^{\ 2} =$

$$\left(\frac{18}{25} + \frac{(t_3-15)^2 + (t_4-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2}{25}\right) -$$
$$-\left(\frac{2}{25} + \frac{(t_3-15)^2 + (t_4-15)^2 + \ldots + (t_{25}-15)^2}{25}\right) =$$
$$= \frac{16}{25}$$

Καλά Αποτελέσματα !!!

Σχόλιο

Δεκτή είναι και κάθε άλλη λύση που στηρίζεται σε ορισμούς και προτάσεις του σχολικού βιβλίου.

♣ Τις λύσεις των θεμάτων επιμελήθηκαν οι μαθηματικοί :

Παπαλουκάς Ιωάννης – Δαμιανός Ιωάννης – Στεργίου Χαράλαμπος

*****Ευχαριστούμε για τη συνεργασία τον προϊστάμενο επιστημονικής και παιδαγωγικής καθοδήγησης της περιφέρειας Στερεάς Ελλάδας και Σχολικό Σύμβουλο, κύριο Ηλία Αργυρόπουλο.**