ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΝΟΜΟΥ ΕΥΒΟΙΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2011

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α 1 . Θεωρία , σχολικό βιβλίο , σελίδα 260 .

Α 2 . Θεωρία , σχολικό βιβλίο , σελίδα 280.

Α 3 . (α) **Σ** , (β) **Σ** , (γ) **Λ** , (δ) **Λ** , (ε) **Σ** .

ΘΕΜΑ Β

Β 1 . Είναι $|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-(0+3i)|=1$,

Άρα ο γεωμ. τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ= 1 .

Β 2 . Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε :

$$|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z-3i})=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \overline{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$$

Β 3 . Είναι

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)\in\mathbb{R}$$

και

$$|w|=\left|z-3i+\frac{1}{z-3i}\right|\le|z-3i|+\left|\frac{1}{z-3i}\right|=1+1=2$$,

δηλαδή $|w|\le 2$ και αφού ο w είναι πραγματικός είναι $-2\le w\le 2$.

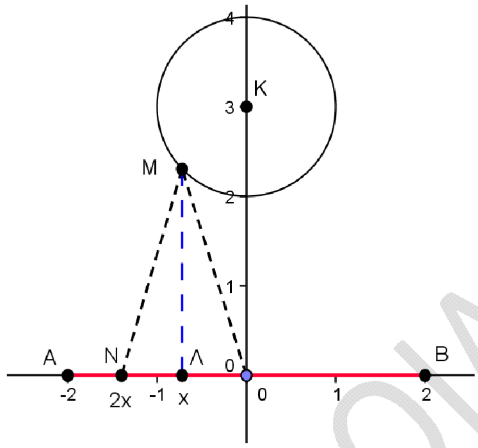
Γεωμετρική λύση : Αν z =x+yi , x,y$\in\mathbb{R}$, τότε ο w=2Re(z)=2x (***πραγματικός***) .

Ο z ικανοποιεί την εξίσωση $x^2+(y-3)^2=1$, οπότε

$$x^2\le 1 \Leftrightarrow |x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2x\le 2 \Leftrightarrow -2\le w\le 2$$

Β 4 . Επειδή ο $w=z+\overline{z}$ έχουμε : $|z-w|=|z-z-\overline{z}|=|-\overline{z}|=|z|$.

Γεωμετρική λύση : Έστω Μ(x,y) η εικόνα του z στον κύκλο $x^2+(y-3)^2=1$. Τότε η εικόνα του w είναι η Ν(2x,0) . Αν το Μ δεν ανήκει στον y΄y , στο τρίγωνο ΟΝΜ η ΜΛ είναι ύψος και διάμεσος , άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές , άρα ΜΝ=ΟΜ , δηλαδή $|z-w|=|z|$. Αν το Μ σημείο του y΄y , τότε ο w=0 , άρα πάλι $|z-w|=|z|$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ 1 . Από τη δεδομένη σχέση έχουμε για κάθε x∈ℝ :

$$e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$$

$$(e^x-x)f''(x)+(e^x-1)f'(x)=e^x\Leftrightarrow$$

$$\left[(e^x-x)f'(x)\right]'=(e^x)'\Leftrightarrow(e^x-x)f'(x)=e^x+c,\ c\in\mathbb{R}\quad \textbf{(1)}$$

Για x=0 έχουμε $(e^0-0)f'(0)=e^0+c\Leftrightarrow c=-1$,

οπότε η (1) δίνει: $(e^x-x)f'(x)=e^x-1$ **(2)**

Έστω η συνάρτηση g με $g(x)=e^x-x$, x∈ℝ .

Η g είναι παραγωγίσιμη στο ℝ με $g'(x)=e^x-1$

$g'(x)=0\Rightarrow e^x-1=0\Rightarrow x=0$ και $g'(x)>0\Rightarrow e^x-1>0\Rightarrow e^x>1\Rightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g΄(x)	-	0	+
g(x)	↘		↗
		ολ.ελ.	

Στον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x_0=0 το g(0)=1 , άρα για κάθε x∈ℝ είναι

$$g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow e^x-x\geq 1>0\,.$$

Έτσι η σχέση (**2**) δίνει :

$f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow f'(x)=\left[\ln(e^x-x)\right]' \Leftrightarrow f(x)=\ln(e^x-x)+c_1$ για κάθε x∈ℝ **.**

Για x=0 προκύπτει : $f(0)=\ln 1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$, οπότε

$$f(x)=\ln(e^x-x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Γ 2 . Έχουμε $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ για κάθε x∈ℝ **.** Επομένως

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$.

Στο διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,0] και γνησίως αύξουσα στο [0,+∞)

x	-∞	0	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x_0=0$ το $f(0)=0$.

Γ 3 . Η f΄ είναι παραγωγίσιμη στο ℝ με

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\ldots=\frac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2}.$$

Η εξίσωση $f''(x)=0 \Leftrightarrow -xe^x+2e^x-1=0$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=-xe^x+2e^x-1$, x∈ℝ. Για να βρούμε το πλήθος των ριζών της θα βρούμε τη μονοτονία της και το σύνολο τιμών της.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο ℝ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=-e^x-xe^x+2e^x=e^x(1-x)\ ,$$

οπότε $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ και $h'(x)>0 \Leftrightarrow x<1$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (-∞,1] και γνησίως φθίνουσα στο [1,+∞) όπως φαίνεται και στον πίνακα.

x	-∞	1	+∞
h΄(x)	+	0	-
h(x)	↗		↘

Για x=1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $h(1)=e-1$.

► $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x+2e^x-1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-x}{e^{-x}}\right)\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-x)'}{(e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, οπότε από τον κανόνα του *De L' Hospital*

είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x)=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-1$.

► $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^x+2e^x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x(2-x)-1\right]=-\infty$.

Επομένως για τη συνάρτηση h έχουμε

$h((-\infty,1])=(-1,e-1]$ και $h([1,+\infty))=(-\infty,e-1]$.

Το 0 ανήκει και στο $h((-\infty,1])$ και στο $h([1,+\infty))$.Άρα στο (- ∞ , 1] ,όπου η h είναι γνησίως αύξουσα ,υπάρχει μοναδικός x_1 τέτοιος ώστε $h(x_1)=0$ και στο [1,+∞) , όπου η h είναι γνησίως φθίνουσα υπάρχει μοναδικός x_2 τέτοιος ώστε $h(x_2)=0$. Λόγω της μονοτονίας της h σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
h(x)		-	0	+	0	-	
f''(x)		-		+		-	
f(x)		$\frown$		$\smile$		$\frown$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

οπότε η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ4 . Έχουμε $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x=0$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x$ με $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά συνεχών με

$\varphi(0)=\ln 1-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$ και $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f(0)=0$. Άρα

από το θεώρημα του *Bolzano* η εξίσωση φ(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με

$\varphi'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}+\eta\mu x=f'(x)+\eta\mu x$.

Για κάθε x$\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και ημx >0 , οπότε $\varphi'(x)>0$, δηλαδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.Έτσι η ρίζα της είναι μοναδική στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ 1 . Είναι $f(x)=1-e^{2x}\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε u=x+t⇒t=u- x άρα du=dt και

t	0	-x
u	x	0

Οπότε $f(x)=1-e^{2x}\int_x^0\frac{e^{2(x-u)}}{g(u)}du=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

ομοίως δείχνουμε ότι $g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $h(u)=\frac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών. Άρα η συνάρτηση με τύπο

$\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι και η g είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}$. Άρα έχουμε $f'(x)g(x)=e^{2x}$ και

$f(x)g'(x)=e^{2x}$, δηλαδή

$$f'(x)g(x)=f(x)g'(x)\Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=c\Leftrightarrow f(x)=c\cdot g(x)$$

για κάθε x$\in\mathbb{R}$. Για x=0 είναι f(0)=g(0)=1 , άρα c=1 , δηλαδή **f(x)=g(x)** για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

Δ 2 . Αφού f(x)=g(x) για κάθε x$\in\mathbb{R}$, έχουμε

$f'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]'=(e^{2x})' \Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+c_1$, $c_1\in\mathbb{R}$.

Για x=0 : $f^2(0)=e^0+c_1 \Leftrightarrow 1=1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$, άρα $f^2(x)=e^{2x}$, για κάθε x$\in\mathbb{R}$ και επειδή $f(x)>0$ στο $\mathbb{R}$, είναι $f(x)=e^x$, x$\in\mathbb{R}$.

Άλλος τρόπος για Δ.1-Δ.2 : Από τις σχέσεις $f'(x)g(x)=e^{2x}$ και $f(x)g'(x)=e^{2x}$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε για κάθε x$\in\mathbb{R}$:

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)g(x))'=(e^{2x})' \Leftrightarrow f(x)g(x)=e^{2x}+c_2$

Για x=0 : $f(0)g(0)=e^0+c_2 \Leftrightarrow 1=1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$, άρα $f(x)g(x)=e^{2x}$.

Άρα $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x$ και επειδή $f(0)=1$ προκύπτει c=0 , άρα $f(x)=e^x$, x$\in\mathbb{R}$.

Δ 3 . Είναι

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$. Θέτουμε $u=\dfrac{1}{x}$, με $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{u\to -\infty}\dfrac{1}{u\cdot e^u}=\lim\limits_{u\to -\infty}\dfrac{e^{-u}}{u}$ (απροσδιοριστία $\left(\dfrac{+\infty}{-\infty}\right)$) .

$\lim\limits_{u\to -\infty}\dfrac{(e^{-u})'}{(u)'}=\lim\limits_{u\to -\infty}\dfrac{-e^{-u}}{1}=-\infty$. Από τον κανόνα του *De L' Hospital* παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=-\infty \ .$$

Δ 4 . Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1|F(x)|dx$.

Επειδή η συνάρτηση $f(t^2)>0$ στο $\mathbb{R}$, για κάθε x∈[0,1] είναι

$\int_x^1 f(t^2)dt>0$. Άρα $F(x)<0$.

Έτσι το εμβαδόν είναι :

$$\mathrm{E}(\Omega)=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 (x)' F(x)dx=-[xF(x)]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=-F(1)+\int_0^1 xe^{x^2}dx=0+\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$$ τ.μ.

Τις λύσεις επιμελήθηκε ο μαθηματικός Αθ. Μπεληγιάννης / 16.05.2011