**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΝΟΜΟΥ ΕΥΒΟΙΑΣ**

**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2009**

**ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

## ***ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ***

### ***ΘΕΜΑ 1$^0$***

**Α.** Θεωρία , σχολικό βιβλίο , σελίδα 251 .

**Β.** Θεωρία , σχολικό βιβλίο , σελίδα 213.

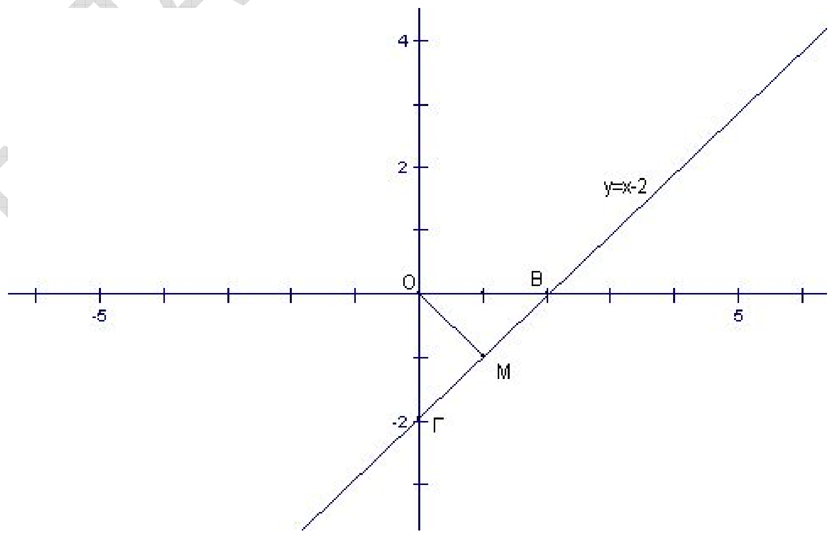
**Γ.** (α) **Σ** , (β) **Σ** , (γ) **Λ** , (δ) **Λ** , (ε) **Λ** .

### ***ΘΕΜΑ 2$^0$***

**Α.** (α) Η εικόνα του μιγαδικού z είναι το σημείο Ν(2λ+1,2λ-1) , $\lambda\in\mathbb{R}$ . Οπότε x=2λ+1 και y=2λ-1 .

Απαλείφοντας από τις δύο σχέσεις το λ παίρνουμε y = x – 2.
Άρα οι εικόνες του z ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση
ε : y=x-2 .

(β)



Το ελάχιστο μέτρο το έχει ο μιγαδικός με εικόνα το σημείο Μ της ε , για το οποίο ΟΜ$\perp$ε . Φέρνουμε την ΟΜ$\perp$ ε , όπως στο παραπάνω σχήμα . Η ΟΜ έχει εξίσωση y= - x . Λύνοντας το σύστημα των (ε) , ΟΜ βρίσκουμε x= 1 και y= - 1 . Άρα Μ(1,-1) και ο μιγαδικός είναι $z_0$= 1 – i , (προκύπτει από τους μιγαδικούς z για λ=0) .

**Β.** Έστω w=x+yi , x,y$\in\mathbb{R}$ . Τότε η εξίσωση γίνεται

$x^2+y^2+x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow (x^2+y^2+x-13)+(1-y)i = 0 \Leftrightarrow$

Y=1 και (x=3 ή x= -4)

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $w_1$= 3+ i ή $w_2$ – 4+ i .

## ***ΘΕΜΑ $3^0$***

**Α.** Παρατηρούμε ότι f(0)=1 . Αφού f(x)$\geq$1=f(0) για κάθε x> -1 , το 1 είναι ολικό ελάχιστο της f . Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (-1,+$\infty$) με $f'(x) = a^x \ln a - \dfrac{1}{x+1}$ . Από το θεώρημα του Fermat προκύπτει ότι f΄(0)=0 $\Leftrightarrow$lnα- 1=0$\Leftrightarrow$lnα = 1$\Leftrightarrow$ α = e .

**Β.** (α) Για α=e η f γίνεται f(x)=$e^x$ – ln(x+1) , x> -1 και η f΄ είναι

$f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ , x> -1 . Η f΄ είναι παραγωγίσιμη στο (-1 ,+$\infty$) με

$f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2}$ για κάθε x> -1. Επειδή είναι f΄΄(x)>0 για κάθε x> -1 η f είναι κυρτή .

(β) Αφού η f είναι κυρτή , η f΄ είναι γνησίως αύξουσα . Άρα για κάθε x με -1<x< 0 $\Leftrightarrow$ f΄(x)< f΄(0)$\Leftrightarrow$ f΄(x)< 0 και για x>0 $\Leftrightarrow$f΄(x)> 0 . Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-1, 0] και γνησίως αύξουσα στο [0,+$\infty$) όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα .

| x | -1 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f΄(x) | | − | **0** | + | |
| f(x) | | ↘ | | ↗ | |

($\gamma$) Η δεδομένη εξίσωση με απαλοιφή παρονομαστών γίνεται

(x-2)(f(β)-1) + (x-1)(f(γ)-1)=0 . Αφού β , γ$\in$(-1,0)$\cup$(0,+$\infty$) είναι f(β)>1 και f(γ)>1.

Έστω η συνάρτηση g με g(x)= (x-2)(f(β)-1) + (x-1)(f(γ)-1) , x$\in$[1,2] .

Η g είναι συνεχής στο [1,2] ως πολυωνυμική . Επίσης

g (1)= -(f(β)- 1)<0 και g(2)= f(γ)-1 >0 , άρα g(1)·g(2)<0 , άρα από το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση g(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,2) , άρα και η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει μία ρίζα στο (1,2) .

## ***ΘΕΜΑ 4$^0$***

**α.** Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,2] και η K(t)=t·f(t) είναι συνεχής στο [0,2] ως γινόμενο συνεχών. Άρα οι συναρτήσεις $y=\int_0^x f(t)dt$ και H(x) είναι παραγωγίσιμες στο [0,2] , άρα και συνεχείς. Οπότε η G είναι συνεχής στο (0,2] ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών. Επίσης για το x=0 βρίσκω

$$G(0)=6\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

και $\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt = 0$ , το $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{H}(x)}{x}$ είναι 0/0 , άρα

$\lim_{x\to 0}\frac{(H(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} xf(x) = 0$ , άρα από τον κανόνα του De Hospital

είναι και $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{H}(x)}{x}$ = 0 . Οπότε $\lim_{x\to 0} G(x) = 0+0+3 = 3 = G(0)$,

άρα η G είναι συνεχής και στο $x_0$=0 , άρα είναι συνεχής στο [0,2] .

**β.** Επειδή οι συναρτήσεις $y=\int_0^x f(t)dt$ και H(x) είναι παραγωγίσιμες στο [0,2] η G είναι παραγωγίσιμη στο (0,2) ως άθροισμα παραγωγίσιμων , με

$$G'(x) = \frac{xH'(x)-H(x)}{x^2} - f(x) = \frac{x^2H(x)-H(x)-x^2H(x)}{x^2} = -\frac{H(x)}{x^2} ,$$

x∈(0,2) .

**γ.** Η G είναι συνεχής στο [0,2] , παραγωγίσιμη στο (0,2) και G(0)=3 . Η δεδομένη σχέση δίνει

$\int_0^2 (t-2)\, f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt = 2\int_0^2 f(t)dt \Leftrightarrow \frac{H(2)}{2} = \int_0^2 f(t)dt$ , άρα

G(2)=3 . Οπότε για την G ισχύει το Θεώρημα του Rolle στο [0,2] , δηλαδή υπάρχει α∈(0,2) τέτοιο ώστε G΄(α)=0⇔H(α)=0 .

**δ.** Η G είναι συνεχής στο [0,α]⊆[0,2] και παραγωγίσιμη στο (0,2) άρα από το Θεώρημα Μέσης τιμής του Διαφορικού λογισμού υπάρχει ξ∈(0,α) ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(a)-G(0)}{a} \Leftrightarrow aG'(\xi) = 0 - \int_0^a f(t)dt + 3 - 3 \Leftrightarrow$$

$$-a\frac{H(\xi)}{\xi^2} = -\int_0^a f(t)dt \Leftrightarrow \alpha\int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2\int_0^a f(t)dt \ .$$

***Τις λύσεις επιμελήθηκε ο μαθηματικός Αθ. Μπεληγιάννης***