Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
Παράρτημα Νομού Ευβοίας

Απαντήσεις - Λύσεις των Θεμάτων
Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης - 2007

ΘΕΜΑ 1^0

Α1. Σχολικό βιβλίο, **σελ. 98.**
Α2. Σχολικό βιβλίο, **σελ. 141.**
Α3. Σχολικό βιβλίο, **σελ. 280**

Β.
- **α. Λ**
- **β. Λ**
- **γ. Λ**
- **δ. Σ (ελλιπής διατύπωση)**
- **ε. Σ**

ΘΕΜΑ 2^0

α. Έχουμε

$$|z| = \left|\frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right| = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1$$

β. Αντικαθιστώντας τις τιμές α = 0, α = 1 βρίσκουμε

$$z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i \quad , \quad z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$$

i. Σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου βρίσκουμε

$$|z_1 - z_2| = |-i-1| = \sqrt{2}$$

ii. Με ισοδυναμίες παρατηρούμε ότι:

$$z_1^{2\nu} = (-z_2)^{\nu} \Leftrightarrow$$

$$(-i)^{2\nu} = (-1)^{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\left[(-i)^2\right]^{\nu} = (-1)^{\nu} \Leftrightarrow$$

$$(-1)^{\nu} = (-1)^{\nu}$$

η οποία ισχύει.

ΘΕΜΑ 3^0

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το IR, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

- $f'(x)=3x^2-3=3\cdot(x-1)\cdot(x-2)$
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1$
- $f''(x)=6x$
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$

Το πρόσημο των f ΄, f΄΄ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

χ	$-\infty$	**-1**	**0**	**1** $+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f''(x)$	-	-	+	+
f	$\nearrow \cap$	$\searrow \cap$	$\searrow \cup$	$\nearrow \cup$

Τ.Μ Σ.Κ Τ.Ε

Από τον πίνακα προκύπτει ότι :

- **Το** $f(1)=-2\cdot(1+\eta\mu^2\theta) < 0$ **είναι τοπικό ελάχιστο**
- **Το** $f(-1)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ **είναι τοπικό μέγιστο**
- **Η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το Μ(0, f(0))**

β.

♦ **Όταν** $x\in(-\infty, -1]$ **το σύνολο τιμών της f είναι**

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ,\ f(-1)\right] = \left(-\infty ,\ 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$

Επειδή το 0 ανήκει σε αυτό, η εξίσωση $f(x)=0$ **έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα** $(-\infty, -1]$**, αφού η f είναι και γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.**

♦ **Όταν** $x\in[-1 , 1]$ **το σύνολο τιμών της f είναι το**

$$\left[f(1) ,\ f(-1)\right] = \left[-2\cdot(1+\eta\mu^2\theta) ,\ 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$$

Επειδή το 0 ανήκει σε αυτό , η εξίσωση $f(x)=0$ **έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα** $[-1 , 1]$**, αφού η f είναι και γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.**

♦ **Όταν** $\chi\in[1 , +\infty)$ **το σύνολο τιμών της f είναι το**

$$\left[f(1) ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-2\cdot(1+\eta\mu^2\theta) ,\ +\infty\right).$$

Επειδή το 0 ανήκει σε αυτό, η εξίσωση $f(x)=0$ **έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα** $[1 , +\infty)$**, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα.**

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ **έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.**

γ. Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι συντεταγμένες των Α, Β, Γ είναι

- $A\left(-1\ ,\ 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)$ **, το οποίο ανήκει στην ευθεία** $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$ **αφού**

$$2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2-2\eta\mu^2\theta,\ \left(\alpha\lambda\eta\theta\acute{\eta}\varsigma\right)$$

- $\mathrm{B}\left(1,\ -2\left(1+\eta\mu^2\theta\right)\right)$**, το οποίο ανήκει στην ευθεία** $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$**, αφού**

$$-2\left(1+\eta\mu^2\theta\right) = -2\cdot 1 - 2\cdot\eta\mu^2\theta \quad \left(\alpha\lambda\eta\theta\acute{\eta}\varsigma\right)$$

- $\Gamma\left(0\ ,\ -2\eta\mu^2\theta\right)$ **το οποίο ανήκει στην ευθεία** $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$**, αφού**

$$-2\eta\mu^2\theta = -2\cdot 0 - 2\cdot\eta\mu^2\theta\ \left(\alpha\lambda\eta\theta\acute{\eta}\varsigma\right)$$

δ. Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$**, βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση:**

$$f(x) = -2x-2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow (x=-1, x=0, x=1)$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς δ(x) = $\mathrm{x}^3-\mathrm{x}$ **, οπότε το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι:**

$$\mathrm{E}=\int_{-1}^{1}\left|\delta(\chi)\right|\mathrm{dx} = \int_{-1}^{1}\left|\mathrm{x}^3\text{-}\mathrm{x}\right|\mathrm{dx} = \int_{-1}^{0}(\mathrm{x}^3\text{-}\mathrm{x})\mathrm{dx}\ -\ \int_{0}^{1}(\mathrm{x}^3\text{-}\mathrm{x})\mathrm{dx}\ =\ ... = \frac{1}{2}$$

<u>ΘΕΜΑ 4^0</u>

α. Η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = f(x)\cdot g(x).$$

Επειδή f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0\ ,1]$, με x >0 παίρνουμε

$$f(x) \rangle\ f(0) \rangle\ 0$$

Είναι όμως και $g(x)\rangle\ 0$ από την υπόθεση, οπότε $F'(x)\rangle\ 0$ για κάθε $x\in[0\ ,1]$

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[0\ ,1]$ και έτσι

$$F(x)\rangle\ F(0)=0 \text{ για κάθε } x\in(0\ ,1].$$

Άλλος τρόπος

Με τον ορισμό της μονοτονίας παίρνουμε ότι $f(x)\rangle\ f(0)\rangle\ 0$**, οπότε**

$$f(t)\cdot g(t)>0$$

και συνεπώς και το ολοκλήρωμα θα είναι επίσης θετικό αφού x > 0

β. Είναι $t\in[0\ ,\ x]$, οπότε διαδοχικά βρίσκουμε :

$t \le x$

$f(t)\le f(x)\ \ (\varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\, \gamma\nu\, \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha)$

Η $\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \ \acute{o}\tau\alpha\nu\ t=x.$

$\acute{O}\mu\omega\varsigma\ \ f(t)\cdot g(t)\le f(x)\cdot g(t)\ ,\ \ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ g(t)\rangle 0.$

Ε$\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma\ \ f(x)\cdot g(t)-f(t)\cdot g(t)\ge 0$

$\kappa\alpha\iota\,\eta\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \ \alpha\upsilon\tau\acute{\eta}\,\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\,\omega\varsigma\,\pi\rho o\varsigma\, t\, \delta\varepsilon\nu\, \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\, \pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}\, \mu\eta\delta\acute{\varepsilon}\nu.$

$$\text{Έτσι}: \int_0^x [f(x)\cdot g(t) - f(t)\cdot g(t)]dt \rangle\ 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot \int_0^x g(t)dt - \int_0^x f(x)\cdot g(t)dt \rangle\ 0$$

$$f(x)\cdot G(x) - F(x) \rangle\ 0$$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$**,** $x \in (0\ ,1]$**.**Είναι :

$$h'(x) = \frac{f(x)\cdot g(x)\cdot G(x) - F(x)\cdot g(x)}{G^2(x)} = g(x)\cdot \frac{f(x)\cdot G(x) - F(x)}{G^2(x)} \rangle\ 0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\ ,1]$ και με $x \le 1$ θα ισχύει

$$h(x) \le h(1) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \le \frac{F(1)}{G(1)}$$

δ. Το όριο γράφεται ως όριο γινομένου δύο συναρτήσεων.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{x^5}$$

Να σημειώσουμε ότι τα όρια οδηγούν σε απροσδιόριστη μορφή, διότι οι συναρτήσεις στους όρους του κάθε κλάσματος είναι συνεχείς ως παραγωγίσιμες.

- Το πρώτο όριο είναι :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \rangle 0$$

- Το δεύτερο όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{x^5} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{2}{5}\cdot x \frac{\eta\mu x^4}{x^4}\right] = \frac{2}{5}\cdot 0 \cdot 1 \ = 0$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5} = 0$$

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>

Δεκτή είναι και κάθε άλλη λύση
που στηρίζεται σε ορισμούς και προτάσεις του σχολικού βιβλίου.

Τις λύσεις των θεμάτων επιμελήθηκαν οι μαθηματικοί:

Παπαλουκάς Ιωάννης - Δαμιανός Ιωάννης - Στεργίου Χαράλαμπος

Δερβεντζή Κατερίνα - Δήμου Λεωνίδας - Ρουμελιώτης Κωνσταντίνος

Ευχαριστούμε για τη συνεργασία τον προϊστάμενο επιστημονικής και παιδαγωγικής καθοδήγησης της περιφέρειας Στερεάς Ελλάδας και Σχολικό Σύμβουλο, κύριο Ηλία Αργυρόπουλο.