ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΝΟΜΟΥ ΕΥΒΟΙΑΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α 1 . Θεωρία , σχολικό βιβλίο , σελίδα 304 .

Α 2 . Θεωρία , σχολικό βιβλίο , σελίδα 279.

Α 3 . Θεωρία , σχολικό βιβλίο , σελίδα 273 .

Α 4 . (α) **Σ** , (β) **Σ** , (γ) **Λ** , (δ) **Λ** , (ε) **Σ** .

ΘΕΜΑ Β

Β 1 . Για $z\neq 0$ έχουμε $z^2+2=2z \Rightarrow z^2-2z+2=0 \Rightarrow (z-1)^2=-1 \Rightarrow$

$(z-1)^2=i^2 \Rightarrow z-1=i$ ή $z-1=-i \Rightarrow$ **$z=1+i$ ή $z=1-i$**

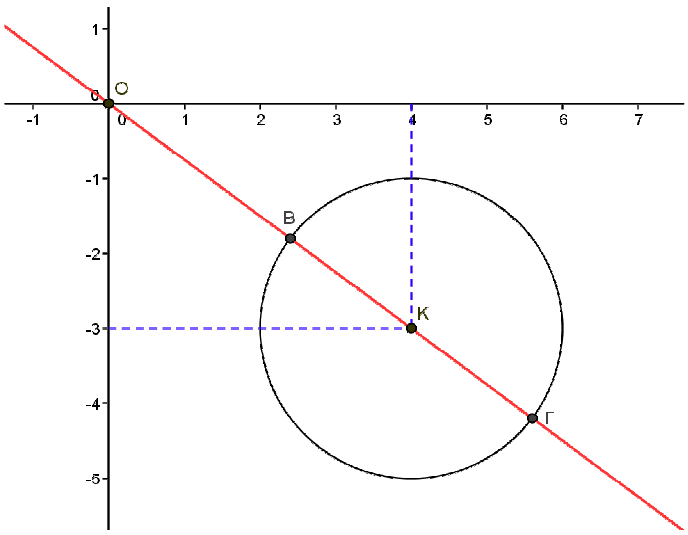
Άρα $z_1=1+i$, $z_2=1-i$.

Β 2 . $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=[(1+i)^2]^{1005}+[(1-i)^2]^{1005}=$
$=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=(2i)^{1005}-(2i)^{1005}=0$.

Β 3 . Είναι $|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Rightarrow |w-(4-3i)|=2$, άρα οι εικόνες του w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο K(4 , - 3) και ακτίνα ρ=2 .

Β 4 . Είναι , σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ,

$(\text{OB}) \leq |w| \leq (\text{OΓ}) \Rightarrow (\text{OK})-\rho \leq |w| \leq (\text{OK})+\rho \Rightarrow 5-2 \leq |w| \leq 5+2 \Rightarrow 3 \leq |w| \leq 7$



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ 1 . Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=2+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2\left(x^2+x+1\right)}{x^2+1}$$

Επειδή για κάθε x$\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+1>0$ και $x^2+x+1>0$ προκύπτει $f'(x)>0$

για κάθε x$\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Γ 2 . Για κάθε x$\in\mathbb{R}$ η εξίσωση γίνεται

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln[(3x-2)^2+1]-\ln\left(x^4+1\right)\Rightarrow$$

$$2x^2+\ln[\left(x^2\right)^2+1]=2(3x-2)+\ln[(3x-2)^2+1]\Rightarrow f\left(x^2\right)=f\left(3x-2\right)$$

και επειδή η f είναι 1-1 , ως γνησίως αύξουσα , έχουμε ,

$x^2=3x-2\Rightarrow x^2-3x+2=0$, άρα **x=1** ή **x=2 .**

Γ 3 . Η f΄ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με $f''(x)=\dfrac{-2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Η εξίσωση f΄΄(x)=0 έχει ρίζες τις x= - 1 , x=1 .

Η ανίσωση f΄΄(x)>0 έχει λύσεις στο διάστημα (-1 ,1) , οπότε φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Άρα σημεία καμπής είναι το σημείο $A(-1\,,\,f(-1))$ και το $B(1,\,f(1))$ με $f(-1)=\ln2-2$ και $f(1)=\ln2+2$.

Για $x=-1$ είναι $f'(-1)=1$, άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(-1\,,\,f(-1))$ είναι η (ε_1) : $y+2-\ln2=x+1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{y=x-1+\ln2}$ **.**

Για $x=1$ είναι $f'(1)=3$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $B(1,f(1))$ είναι η (ε_2) : $y-2-\ln2=3(x-1) \Rightarrow$ $\boldsymbol{y=3x-1+\ln2}$ **.**

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών βρίσκουμε ότι το κοινό τους σημείο είναι το $\boldsymbol{(0\,,\,-1+\ln2)}$ που ανήκει στον άξονα $y'y$.

Γ4 . Έχουμε

$$I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\left[2x^2+x\ln\left(x^2+1\right)\right]dx=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_{-1}^{1}2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}(1+1)=\frac{4}{3}$$

$$I_2=\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)'\ln\left(x^2+1\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)\frac{2x}{x^2+1}dx=0-\int_{-1}^{1}xdx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=0$$

Άρα είναι $I=\dfrac{4}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ 1 . Η συνάρτηση $f_1(t)=\dfrac{t}{f(t)-t}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σ' αυτό , άρα η συνάρτηση $\int_0^x \dfrac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Επίσης η $f_2(x)=x+3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική .

Οπότε η $f(x)=x+3+\int_0^x \dfrac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=1+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}\ .$$

Δ 2 . Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=\frac{2f^2(x)}{f(x)-x}-2f(x)-\frac{2xf(x)}{f(x)-x}=$$

$$=\frac{2f^2(x)-2f^2(x)+2xf(x)-2xf(x)}{f(x)-x}=0$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Θέτοντας όπου x=0 βρίσκουμε **f(0)=3** και **g(0)=9** , άρα **g(x)=9** για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ 3 . Αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=9\Rightarrow f^2(x)-2xf(x)=9\Rightarrow$

$(f(x)-x)^2=x^2+9\Rightarrow \left|f(x)-x\right|=\sqrt{x^2+9}$ (1) , για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $h(x)=f(x)-x$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών και **$h(x)\neq 0$** για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η h διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή h(0)= 3 >0 , είναι **h(x) >0⇒f(x)> x** για κάθε x$\in\mathbb{R}$. Οπότε η σχέση (1) μας δίνει $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

Δ 4 . Έστω η συνάρτηση $K(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $K'(x)=f(x)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της Κ με $K''(x)=f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}$. Για κάθε x$\in\mathbb{R}$ είναι Κ΄΄(x)>0 , (αφού $\sqrt{x^2+9}>\sqrt{x^2}=|x|\ge 0$) άρα η Κ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η ζητούμενη σχέση γίνεται

$$\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt \Rightarrow K(x+1)-K(x)<K(x+2)-K(x+1).$$

Η συνάρτηση Κ είναι συνεχής στο [x , x+1] , παραγωγίσιμη στο (x , x+1) , άρα από το Θ. Μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1\in$(x , x+1) : **Κ΄(ξ_1)= Κ(x+1) - Κ(x)** .

Η συνάρτηση Κ είναι συνεχής στο [x+1 , x+2] , παραγωγίσιμη στο (x+1 , x+2) , άρα από το Θ. Μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2\in$(x+1 , x+2) :

Κ΄(ξ_2)=Κ(x+2) – Κ(x+1) . Επειδή η Κ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι

$\xi_1<\xi_2 \Rightarrow$ Κ΄(ξ_1) < Κ΄(ξ_2) $\Rightarrow$ Κ(x+1) - Κ(x) < Κ(x+2) – Κ(x+1)

$$\Rightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt .$$

Τις λύσεις επιμελήθηκε ο μαθηματικός Αθ. Μπεληγιάννης / 19.05.2010