Μερικά συμπεράσματα πάνω στα θεωρήματα μέσης τιμής του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού

Μπάμπης Στεργίου – Σεπτέμβριος 2009

Περίληψη

Το παρακάτω άρθρο γράφηκε με αφορμή τα όσα αναφέρονται στις δύο σημαντικές πηγές που δίνονται στη βιβλιογραφία. Έχουν σκοπό να εμπλουτίσουν το οπλοστάσιο του καθηγητή του μαθηματικών με το να καταδείξουν ορισμένα αξιόλογα συμπεράσματα των θεωρημάτων μέσης τιμής, τόσο του διαφορικού όσο και του ολοκληρωτικού λογισμού. Η χρήση των λατινικών γραμμάτων στις μεταβλητές έγινε για πρακτικούς λόγους κατά την πληκτρολόγηση του κειμένου και ελπίζω αυτό να μην αποτελέσει αρνητικό στοιχείο στην κατανόηση όσων ακολουθούν.

Θεωρήματα και προτάσεις

Θεώρημα 1^o

A. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, τότε υπάρχει $c\in(a,b)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

1^o θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

B. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, τότε για κάθε $x\in(a,b]$ υπάρχει $c=c(x)\in(a,x)$ τέτοιο, ώστε $\int_a^x f(t)dt=f(c)(x-a)$.

Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο a με $f'(a)\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

Απόδειξη

A. Είναι βασικό θεώρημα και προκύπτει με εφαρμογή του ΘΜΤ για τη συνάρτηση $h(x)=\int_a^x f(x)dx$ στο διάστημα $[a,b]$.

B. Θεωρούμε το όριο :

$$K=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt-xf(a)+af(a)}{(x-a)^2}$$

Σύμφωνα με το 1^o θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού , υπάρχει $c\in(a,x)$ τέτοιο ώστε $\int_a^x f(t)dt=f(c)(x-a)$. Επομένως :

$$K=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt-xf(a)+af(a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f(c)(x-a)-xf(a)+af(a)}{(x-a)^2}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(c)(x-a)-f(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f(c)-f(a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\cdot\frac{c-a}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}\right)=$$

$$=f'(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}\qquad(1)$$

Εφαρμόζοντας όμως το θεώρημα του de L'Hospital για το όριο K παίρνουμε :

$$K=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt-xf(a)+af(a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}f'(a)\qquad(2)$$

Επειδή $f'(a)\neq 0$, από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε :

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

Γενικεύσεις

Στο σκεπτικό του παραπάνω θεωρήματος κινούνται και οι επόμενες προτάσεις :

Πρόταση 1.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο a με $f'(a)=0$ και $f''(a)\neq 0$, τότε

α) για κάθε $x \in (a,b]$ υπάρχει $c = c(x) \in (a,x)$ τέτοιο , ώστε $\int_a^x f(t)dt = f(c)(x-a)$.

β) ισχύει ότι :

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Πρόταση 2.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο σημείο a με $f^{(k)}(a)=0$ για $k=1,2,3,...,n-1$ και $f^{(n)}(a)\neq 0$, τότε

α) για κάθε $x \in (a,b]$ υπάρχει $c = c(x) \in (a,x)$ τέτοιο , ώστε $\int_a^x f(t)dt = f(c)(x-a)$.

β) ισχύει ότι :

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$$

Θεώρημα 2ο

Α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε για κάθε $x \in (a,b]$ υπάρχει $c = c(x) \in (a,x)$ τέτοιο , ώστε

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a).$$

Θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange

Β. Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο a με $f''(a)\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

Απόδειξη

Α. Πρόκειται για θεώρημα στα σχολικά βιβλία

Β. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$ και $G(x)=(x-a)^2$, με $x\in[a,b]$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $x\in[a,b)$ με $G'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$.Έχουμε :

♦ Σύμφωνα με τον κανόνα de L'Hospital είναι :

$$K=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}f''(a)\ ,$$

♦ Σύμφωνα και με το Α είναι επίσης :

$$K=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)(x-a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(c)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(c)-f'(a)}{c-a}\cdot\frac{c-a}{x-a}\right)=f''(a)\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και αφού πρόκειται για το ίδιο όριο παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

Θεώρημα 3ο

Α. Αν f,g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και η g δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $[a,b]$, τότε για κάθε $x\in(a,b]$ υπάρχει $c=c(x)\in[a,x]$ τέτοιο , ώστε

$$\int_a^x f(t)g(t)dt=f(c)\int_a^x g(t)dt\,.$$

2^o θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Β. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο a με $f'(a)\neq 0$ και $g(a)\neq 0$ τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

Απόδειξη

Α. Η απόδειξη υπάρχει σε βιβλία ολοκληρωτικού λογισμού.

Β. Θεωρούμε τις συναρτήσεις F,G στο $[a,b]$ με τύπους :

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt-f(a)\int_a^x g(t)dt\quad\text{και}\quad G(x)=(x-a)^2$$

Αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $[a,b]$ με $G'(x)\neq 0$ για κάθε χ στο $(a,b]$. Από τον κανόνα de L'Hospital παίρνουμε :

$$K=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)}{2(x-a)}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x))=\frac{1}{2}f'(a)g(a)\quad (1)$$

Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με το Α. είναι :

$$K=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(c)\int_a^x g(t)dt-f(a)\int_a^x g(t)dt}{(x-a)^2}=$$
$$=\lim_{x\to a}(\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\cdot\frac{c-a}{x-a}\cdot\frac{\int_a^x g(t)dt}{x-a})=f'(a)g(a)\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}\quad (2)$$

όπου στο τελευταίο όριο έχουμε χρησιμοποιήσει ξανά τον κανόνα de L'Hospital.

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε, λόγω των περιορισμών $f'(a)\neq 0, g(a)\neq 0$ ότι

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

Θεώρημα 4ο

A. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b) με $g'(t)\neq 0$ για κάθε $t\in(a,b)$. Τότε , για κάθε $x\in(a,b]$ ισχύσει ότι :

α) $g(x)\neq g(a)$

β) υπάρχει $c=c(x)\in(a,x)$, τέτοιο , ώστε

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy

B. Αν επιπλέον οι συναρτήσεις f,g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο a, $g'(a)\neq 0$ και $f''(a)g'(a)\neq f'(a)g''(a)$, τότε :

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

Απόδειξη

A. Είναι βασικό θεώρημα του διαφορικού λογισμού.

B. θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$F(x)=f(x)-f(a)-[g(x)-g(a)]\frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{και } G(x)=(x-a)^2$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $[a,b)$ και $G'(x)\neq 0$ στο (a,b).

♦ Επειδή από το A είναι $f(x)-f(a)=[g(x)-g(a)]\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, έχουμε:

$$K=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{[g(x)-g(a)]\frac{f'(c)}{g'(c)}-[g(x)-g(a)]\frac{f'(a)}{g'(a)}}{(x-a)^2}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{f'(c)}{g'(c)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}}{c-a}\cdot\frac{c-a}{x-a}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=g'(a)\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)'\Big|_{x=a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a} \quad (1)$$

♦ Σύμφωνα με τον κανόνα de L'Hospital έχουμε :

$$K=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)\frac{f'(a)}{g'(a)}}{2(x-a)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}}{x-a}\cdot g'(x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}g'(a)\cdot\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)'\Big|_{x=a} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) , λόγω των περιορισμών , παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση.

Βιβλιογραφία***

α) B.Jacobson – on the mean value theorem for integrals, AMM, vol 89 – 1992

β) Emil Popa – Περί του ενδιάμεσου σημείου στα θεωρήματα των μέσων, GM – 1994

*** Ευχαριστώ το φίλο και συνάδελφο Νίκο Μαυρογιάννη που μου εξασφάλισε το πρώτο άρθρο της βιβλιογραφίας.

Παράρτημα***

Αποδείξεις των βασικών θεωρημάτων του άρθρου

Α. 1ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ στο [α , b]. Η h είναι συνεχής στο [α , b] και παραγωγίσιμη στο (α , b).Άρα από το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει $c \in (a,b)$ τέτοιο , ώστε

$$h'(c)=\frac{h(b)-h(\alpha)}{b-\alpha}=\frac{\int_{\alpha}^{b} f(t)dt-0}{b-\alpha}=\frac{\int_{\alpha}^{b} f(t)dt}{b-\alpha}$$

Επομένως $\int_{\alpha}^{b} f(t)dt=(b-\alpha)h'(c)$

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ LAGRANGE

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t)=f(t)-f(a)-(t-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, η οποία είναι συνεχής στο [α , x] και παραγωγίσιμη στο (α , x) με

$$h'(t)=f'(t)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$h(a)=f(a)-f(a)-\left(a-a\right)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0 \quad \text{και} \quad h(x)=f(x)-f(a)-\left(x-a\right)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$$

΅Ετσι ισχύει το θεώρημα Rolle , δηλ. υπάρχει $c\in\left(a,x\right)$ τέτοιο, ώστε $h'(c)=0$ δηλ.

$$f'(c)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0\Leftrightarrow f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Leftrightarrow f(x)-f(a)=\left(x-a\right)\cdot f'(c)$$

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (2^o θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f , g συνεχείς συναρτήσεις $[a,b]$ και η g δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $[a,b]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(a,b]$, υπάρχει $c\in(a,x)$ τέτοιο , ώστε

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,g(t)dt=f(c)\cdot\int_{\alpha}^{x} g(t)\,dt$$

Απόδειξη

Η g είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη στο [α , b] , οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Έστω ότι g(x) > 0 .
Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα , οπότε θα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή δηλ.
$m\le f(x)\le M$. Άρα

$$mg(t)\le f(t)g(t)\le Mg(t)$$

Ολοκληρώνοντας στο $[a,x]$ προκύπτει:

$$\int_a^x mg(t)\,dt\le\int_a^x f(t)g(t)\,dt\le\int_a^x M\,g(t)dt\Leftrightarrow m\int_a^x g(t)\,dt\le\int_a^x f(t)g(t)\,dt\le M\int_a^x g(t)\,dt$$

Όμως $\int_{\alpha}^{x} g(t)\,dt>0$, οπότε προκύπτει $m\le\frac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}\le M$

Από εδώ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $c \in [a,x]$ τέτοιο ,ώστε $\dfrac{\int_a^x f(t)g(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = f(c)$ δηλ.

$$\int_\alpha^x f(t)\,g(t)dt = f(c)\cdot\int_\alpha^x g(t)\,dt$$

Δ. ΘΕΩΡΗΜΑ 4 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ CAUCHY)

Έστω f , g συνεχείς συναρτήσεις στο [α , x] και παραγωγίσιμες στο (a , x) με $g'(t) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε , για κάθε $x \in (a,b]$ ισχύει ότι :

α) $g(x) \neq g(a)$

β) υπάρχει $c \in (a,x)$ τέτοιο , ώστε $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$

Απόδειξη

α) Υποθέτουμε ότι $g(x) = g(a)$. Όμως η g είναι συνεχής στο [α , x] , παραγωγίσιμη στο (α , x) και $g(x) = g(a)$, Άρα ισχύει το θεώρημα Rolle , δηλ. υπάρχει $c \in (a,x)$ τέτοιο, ώστε $g'(c) = 0$, το οποίο είναι άτοπο , διότι $g'(t) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t) = f(t)\cdot[g(x)-g(\alpha)] - g(t)\cdot[f(x)-f(\alpha)]$

Η h είναι συνεχής στο [α , x] , παραγωγίσιμη στο (α , x) με

$$h'(t) = f'(t)\cdot[g(x)-g(\alpha)] - g'(t)\cdot[f(x)-f(\alpha)]$$

και ισχύει:

$$h(a) = f(a)\cdot[g(x)-g(\alpha)] - g(a)\cdot[f(x)-f(\alpha)] = f(a)\cdot g(x) - g(a)\cdot f(x)$$
$$h(x) = f(x)\cdot[g(x)-g(\alpha)] - g(x)\cdot[f(x)-f(\alpha)] = f(a)\cdot g(x) - g(a)\cdot f(x)$$

$$\text{δηλαδή} \quad h(x) = h(\alpha)$$

Από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι υπάρχει $c \in (a,x)$ τέτοιο , ώστε $h'(c) = 0$,δηλαδή

$$f'(c)\cdot[g(x)-g(\alpha)] - g'(c)\cdot[f(x)-f(\alpha)] = 0$$

και τελικά

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$$

*** **Την επιμέλεια των αποδείξεων έκανε ο συνάδελφος Χρήστος Καρδάσης , τον οποίο και ευχαριστώ.**